

Cartografía fractal de áreas urbanas.

Dr. Marcos E. Gaudiano



Universidad Nacional
de Córdoba



Centro de Investigación
y Estudios de Matemática
de Córdoba



Fractal cartography of urban areas

Sara Encarnação^{1,2}, Marcos Gaudiano¹, Francisco C. Santos^{1,3}, José A. Tenedório² & Jorge M. Pacheco^{1,4}

SUBJECT AREAS:

STATISTICAL PHYSICS,
THERMODYNAMICS AND
NONLINEAR DYNAMICS
MODELLING AND THEORY
MATHEMATICS
SUSTAINABILITY

Received
2 May 2012

Accepted
6 July 2012

Published
24 July 2012

Correspondence and
requests for materials
should be addressed to
J.M.P. (pacheco@cii.
fc.ul.pt)

¹Applications of Theoretical Physics Group, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Instituto para a Investigação Interdisciplinar, P-1649-003 Lisboa Codex, Portugal, ²Centro de Estudos de Geografia e Planeamento Regional, Faculdade de Ciências Sociais e Humanas, Universidade Nova de Lisboa, Avenida de Berna 26-C, 1069-061 Lisboa, Portugal, ³Departamento de Engenharia Informática & INESC-ID, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, IST-Tagusparque, 2744-016 Porto Salvo, Portugal, ⁴Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho, 4710-057 Braga, Portugal.

In a world in which the pace of cities is increasing, prompt access to relevant information is crucial to the understanding and regulation of land use and its evolution in time. In spite of this, characterization and regulation of urban areas remains a complex process, requiring expert human intervention, analysis and judgment. Here we carry out a spatio-temporal fractal analysis of a metropolitan area, based on which we develop a model which generates a cartographic representation and classification of built-up areas, identifying (and even predicting) those areas requiring the most proximate planning and regulation. Furthermore, we show how different types of urban areas identified by the model co-evolve with the city, requiring policy regulation to be flexible and adaptive, acting *just in time*. The algorithmic implementation of the model is applicable to any built-up area and simple enough to pave the way for the automatic classification of urban areas worldwide.

During the eighties fractal concepts have received widespread attention, including in geography^{1–10}. Since then, geographers, urban planners and others have investigated the relation between fractal structures and urban areas^{6,9–26}, where the calculation of the global fractal dimension (D) of cities (and surrounding areas), in Europe and the U.S.A.^{13,27}, has been carried out. Comparison between cities worldwide lead to an average of $D=1.7$ ^{13,28}. Growth patterns¹³, in turn, show a general increase of D with time for several



Fractal cartography of urban areas

Sara Encarnação^{1,2}, Marcos Gaudiano¹, Francisco C. Santos^{1,3}, José A. Tenedório² & Jorge M. Pacheco^{1,4}

SUBJECT AREAS:

STATISTICAL PHYSICS,
THERMODYNAMICS AND
NONLINEAR DYNAMICS
MODELLING AND THEORY
MATHEMATICS
SUSTAINABILITY

Received
2 May 2012

Accepted
6 July 2012

Published
24 July 2012

Correspondence and
requests for materials
should be addressed to
J.M.P. (pacheco@cii.
fc.ul.pt)

¹Applications of Theoretical Physics Group, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Instituto para a Investigação Interdisciplinar, P-1649-003 Lisboa Codex, Portugal, ²Centro de Estudos de Geografia e Planeamento Regional, Faculdade de Ciências Sociais e Humanas, Universidade Nova de Lisboa, Avenida de Berna 26-C, 1069-061 Lisboa, Portugal, ³Departamento de Engenharia Informática & INESC-ID, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, IST-Tagusparque, 2744-016 Porto Salvo, Portugal, ⁴Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho, 4710-057 Braga, Portugal.

In a world in which the pace of cities is increasing, prompt access to relevant information is crucial to the understanding and regulation of land use and its evolution in time. In spite of this, characterization and regulation of urban areas remains a complex process, requiring expert human intervention, analysis and judgment. Here we carry out a spatio-temporal fractal analysis of a metropolitan area, based on which we develop a model which generates a cartographic representation and classification of built-up areas, identifying (and even predicting) those areas requiring the most proximate planning and regulation. Furthermore, we show how different types of urban areas identified by the model co-evolve with the city, requiring policy regulation to be flexible and adaptive, acting *just in time*. The algorithmic implementation of the model is applicable to any built-up area and simple enough to pave the way for the automatic classification of urban areas worldwide.

During the eighties fractal concepts have received widespread attention, including in geography^{1–10}. Since then, geographers, urban planners and others have investigated the relation between fractal structures and urban areas^{6,9–26}, where the calculation of the global fractal dimension (D) of cities (and surrounding areas), in Europe and the U.S.A.^{13,27}, has been carried out. Comparison between cities worldwide lead to an average of $D=1.7$ ^{13,28}. Growth patterns¹³, in turn, show a general increase of D with time for several

Área Metropolitana de Lisboa, Portugal



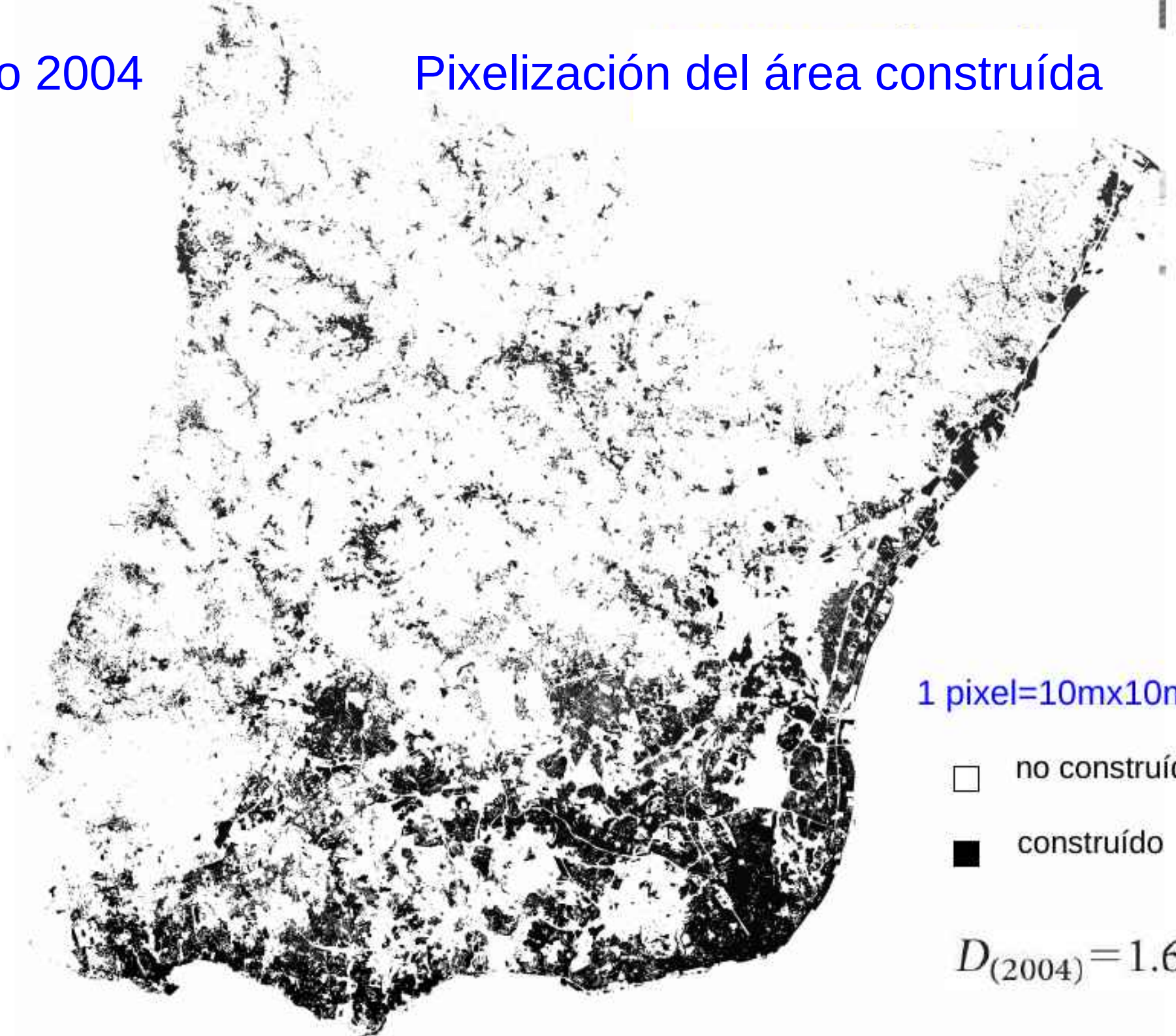
Área Metropolitana de Lisboa, Portugal



45 Km x 45 Km

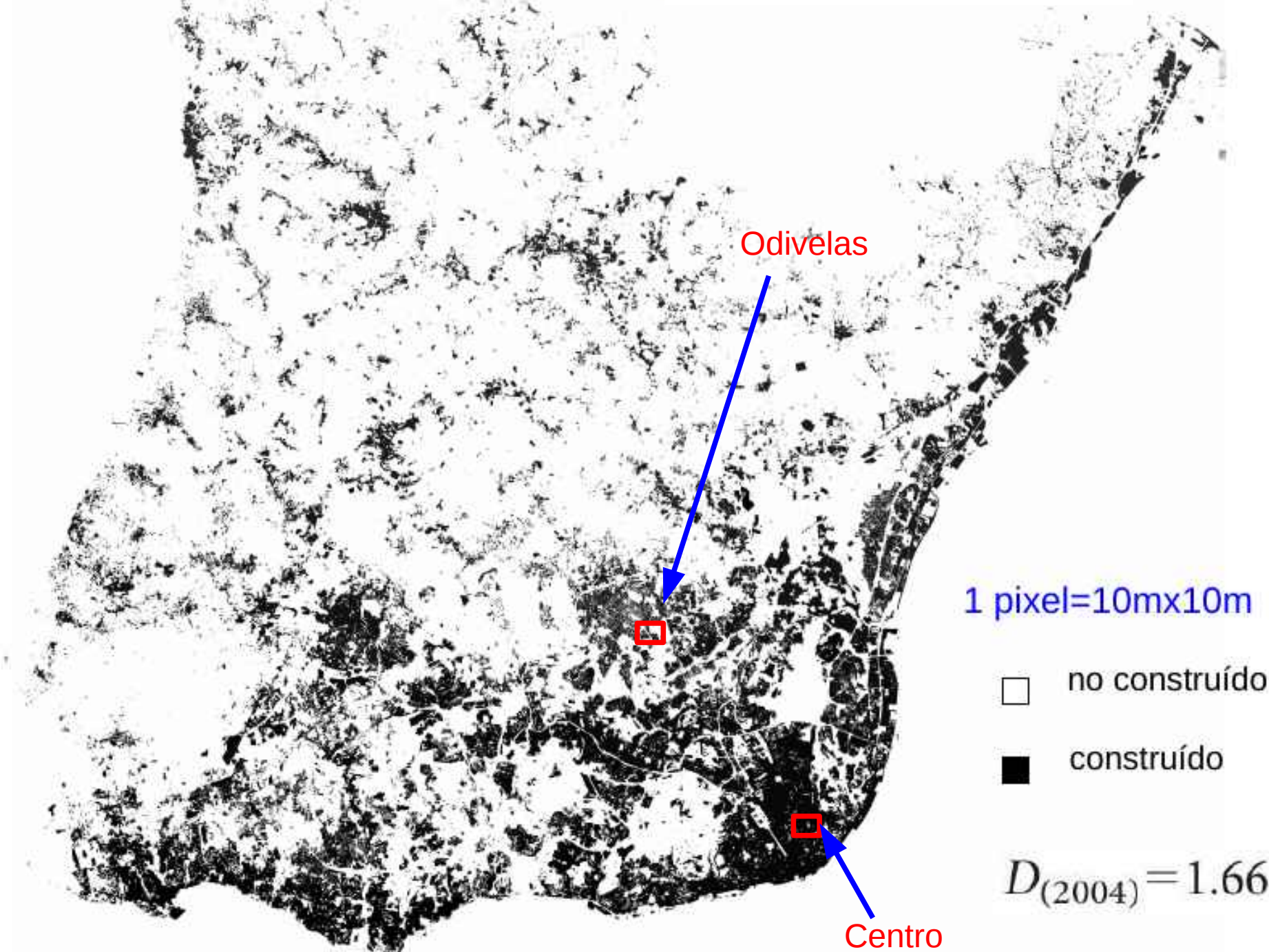
Año 2004

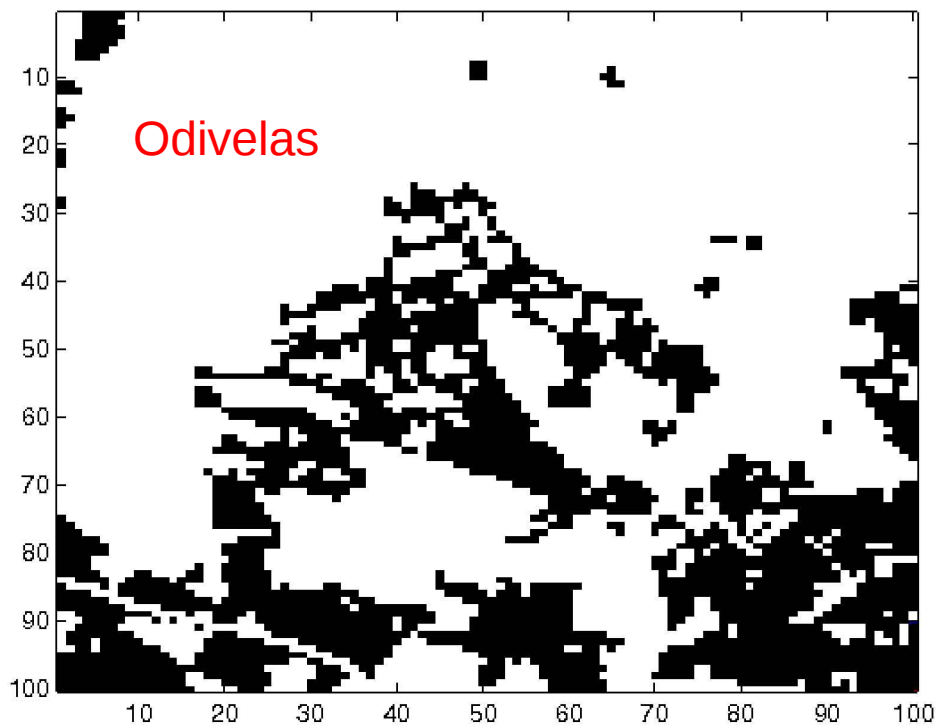
Pixelización del área construída



Año 2004

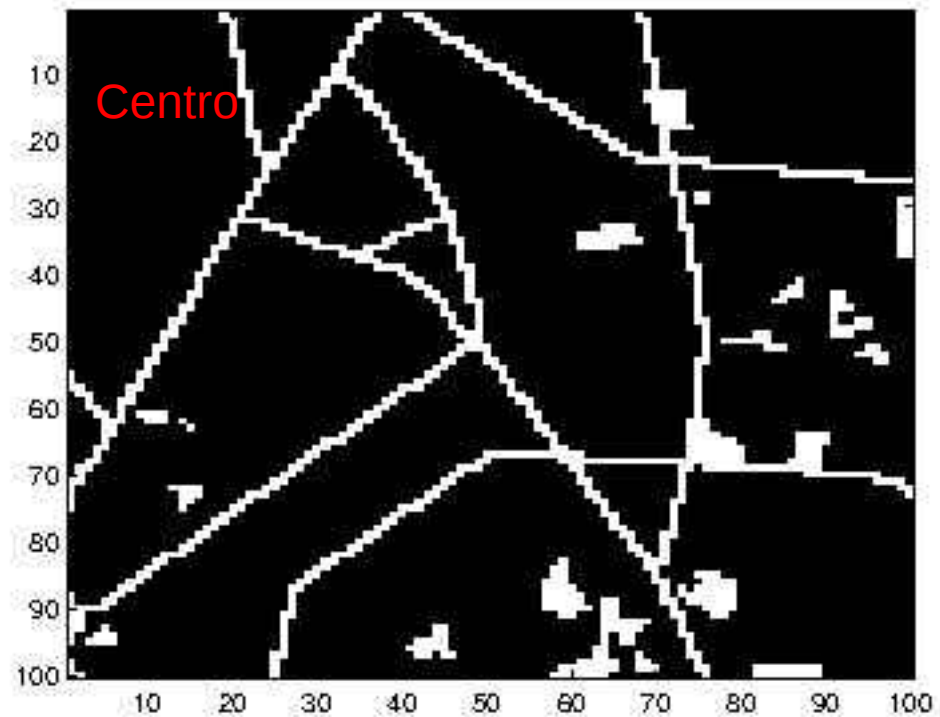
Pixelización del área construída

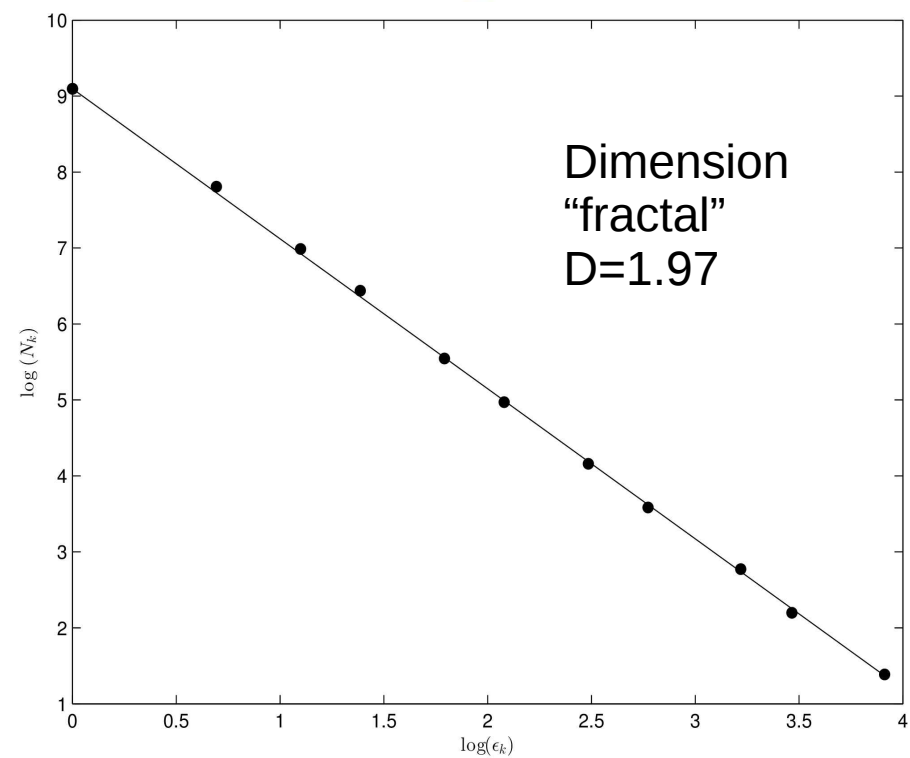
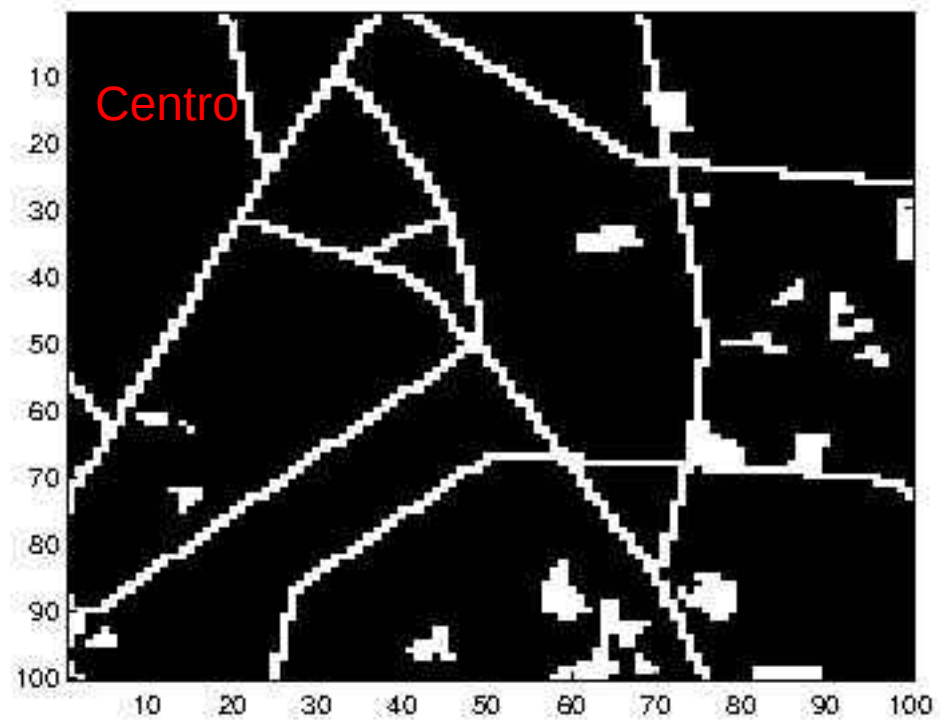
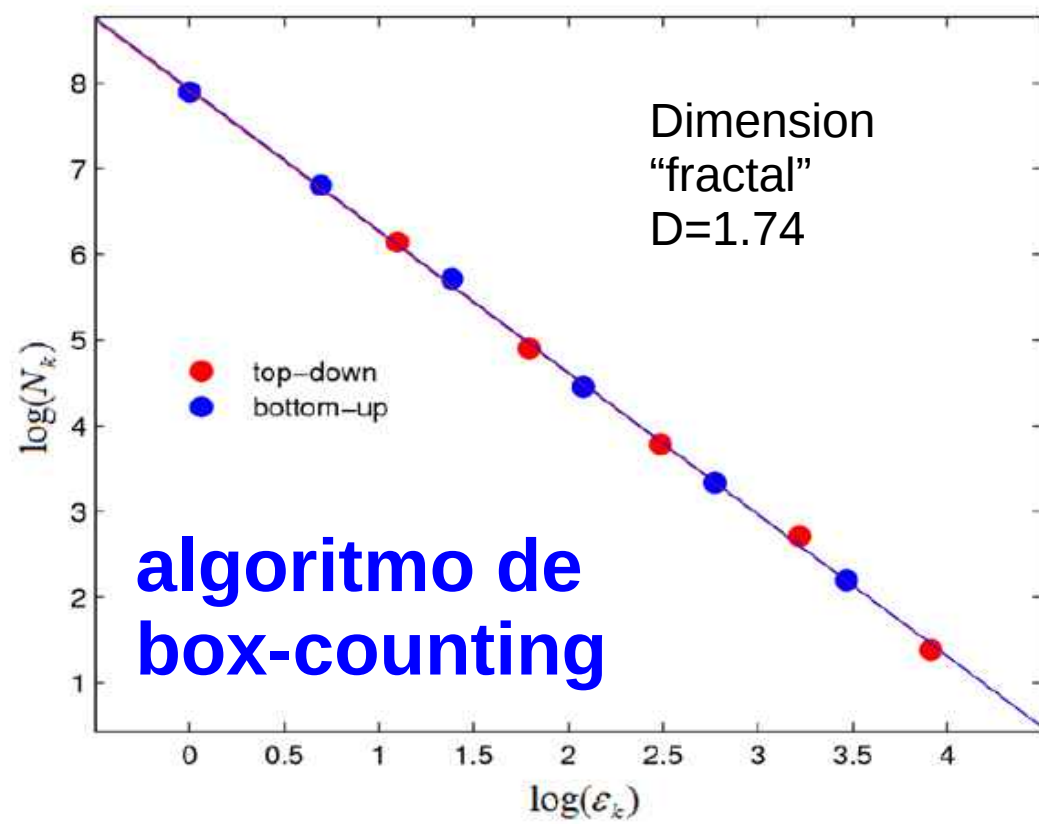
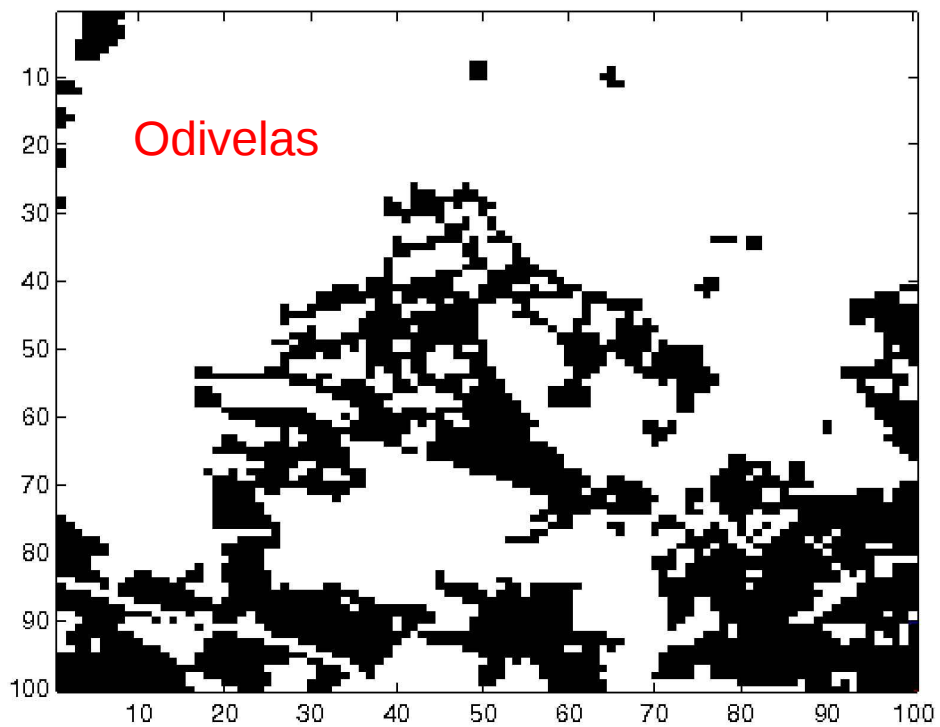


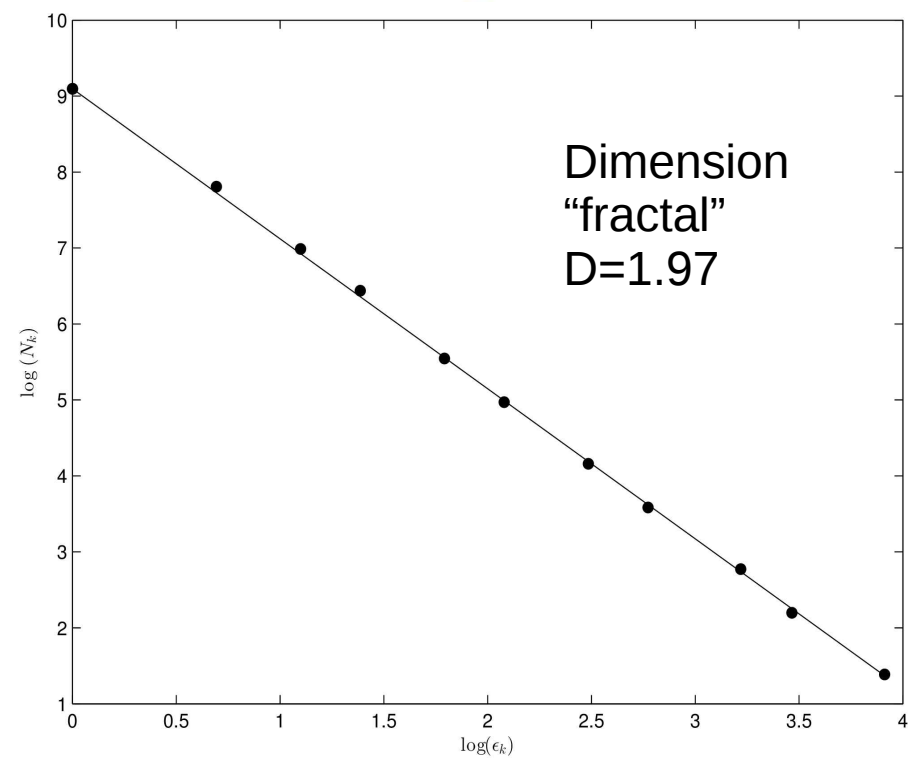
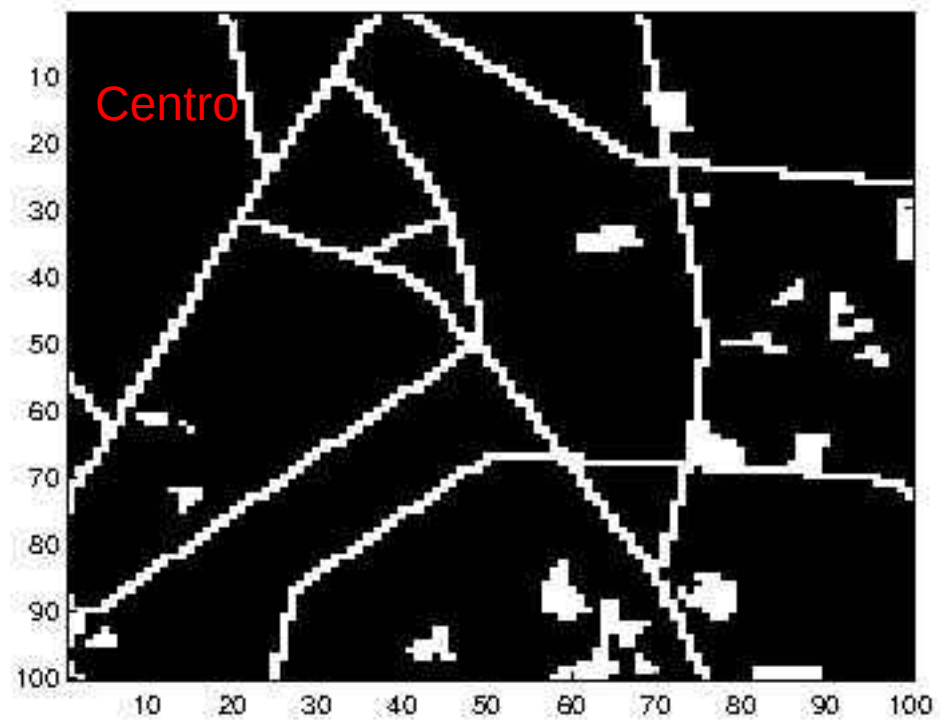
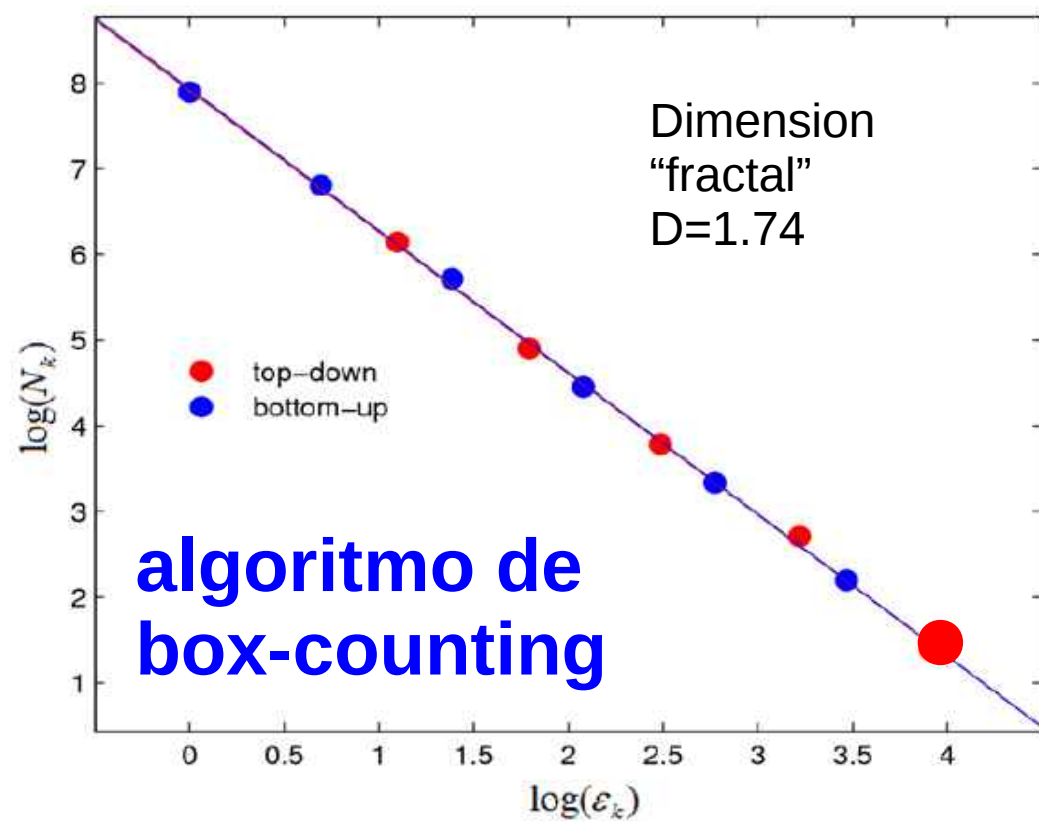
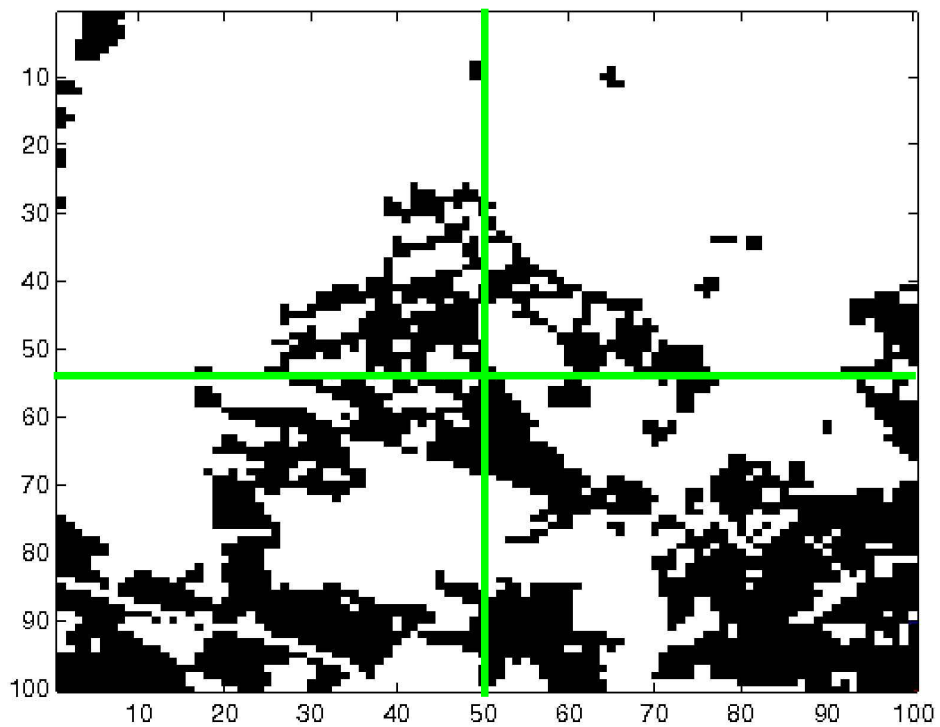


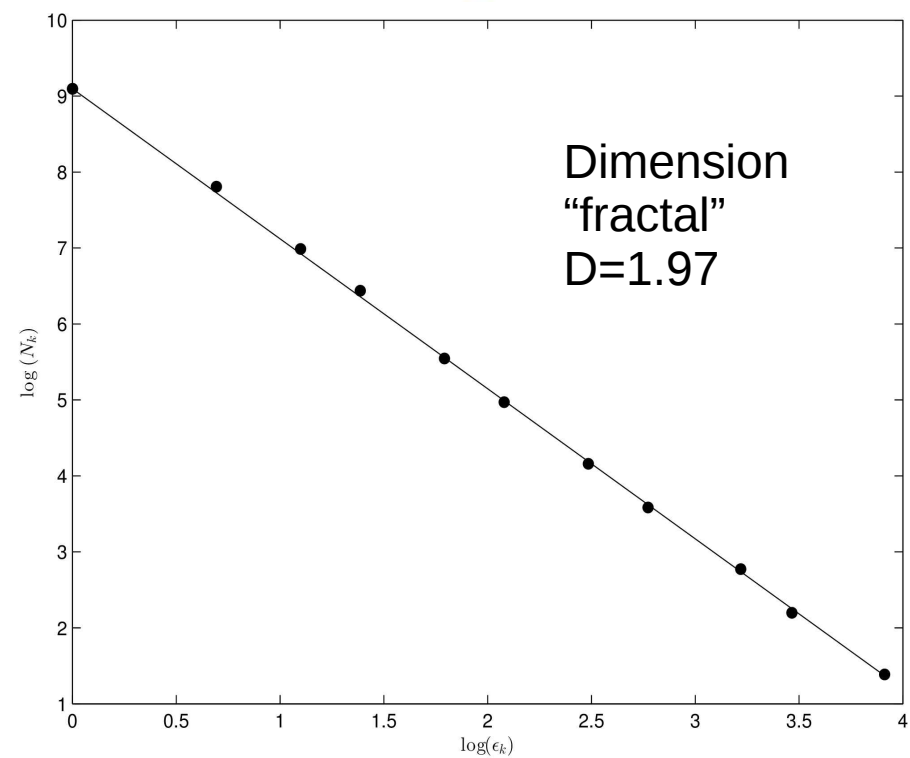
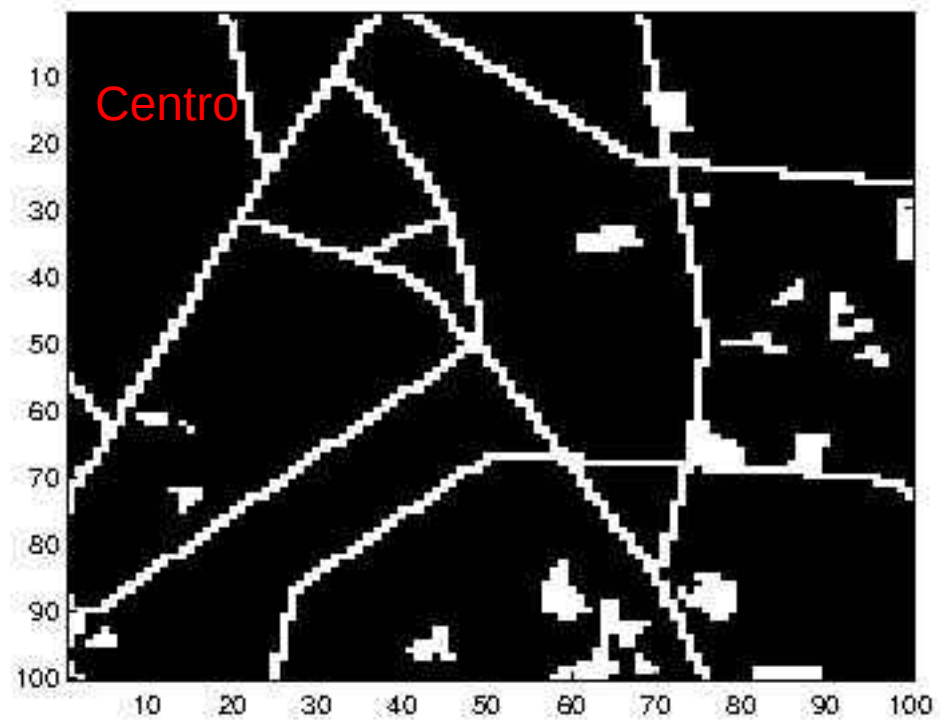
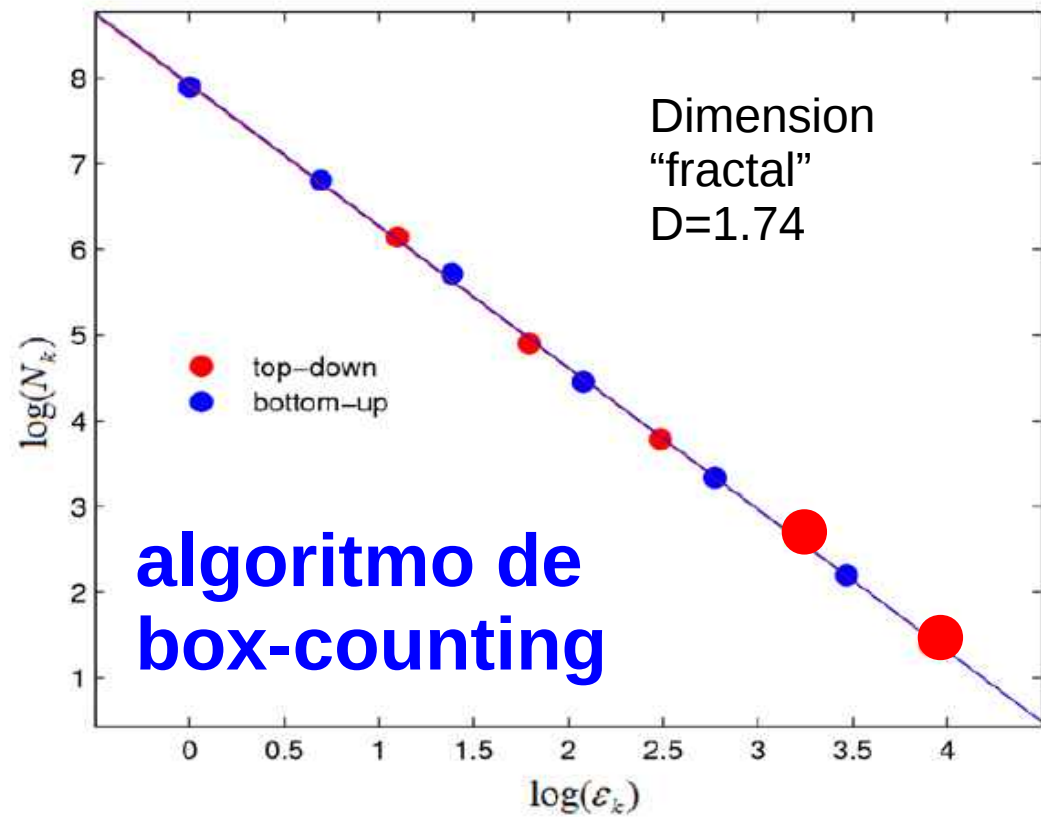
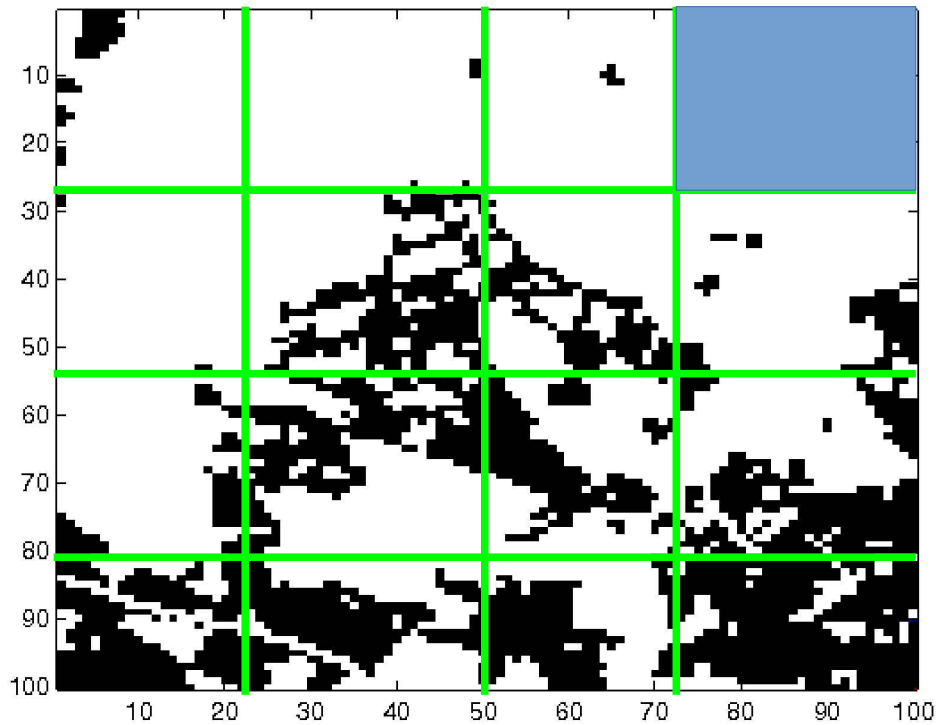
DIMENSIÓN FRACTAL

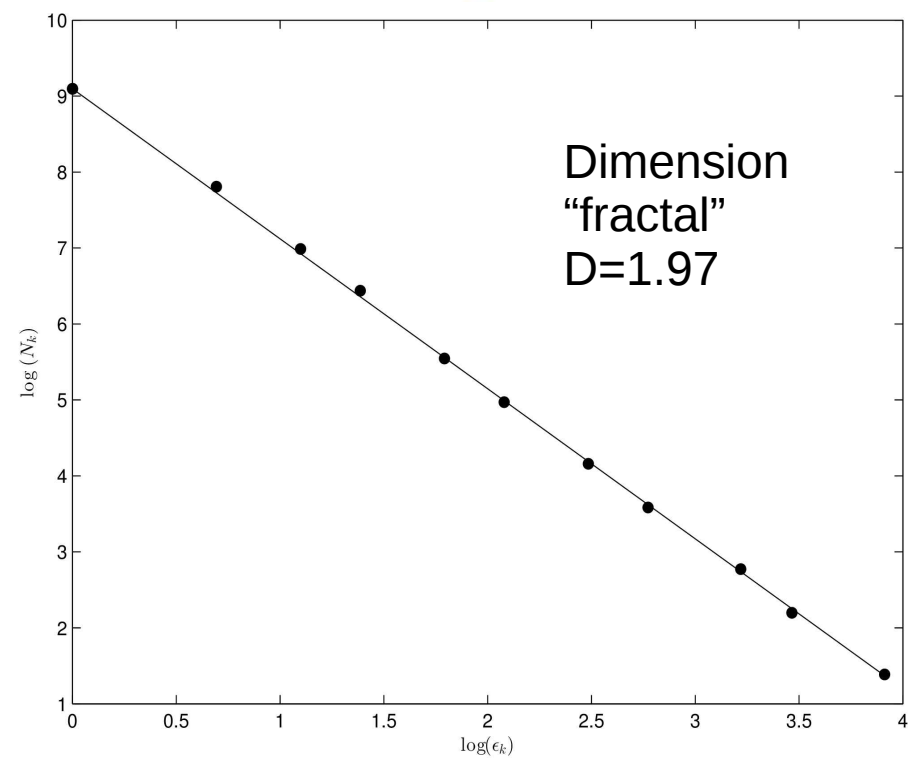
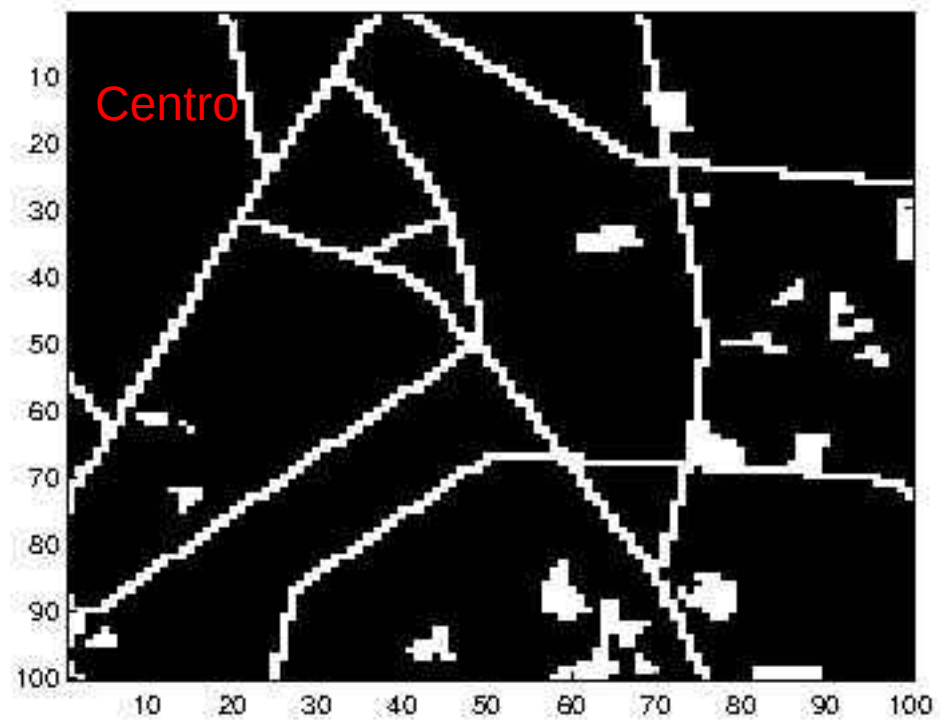
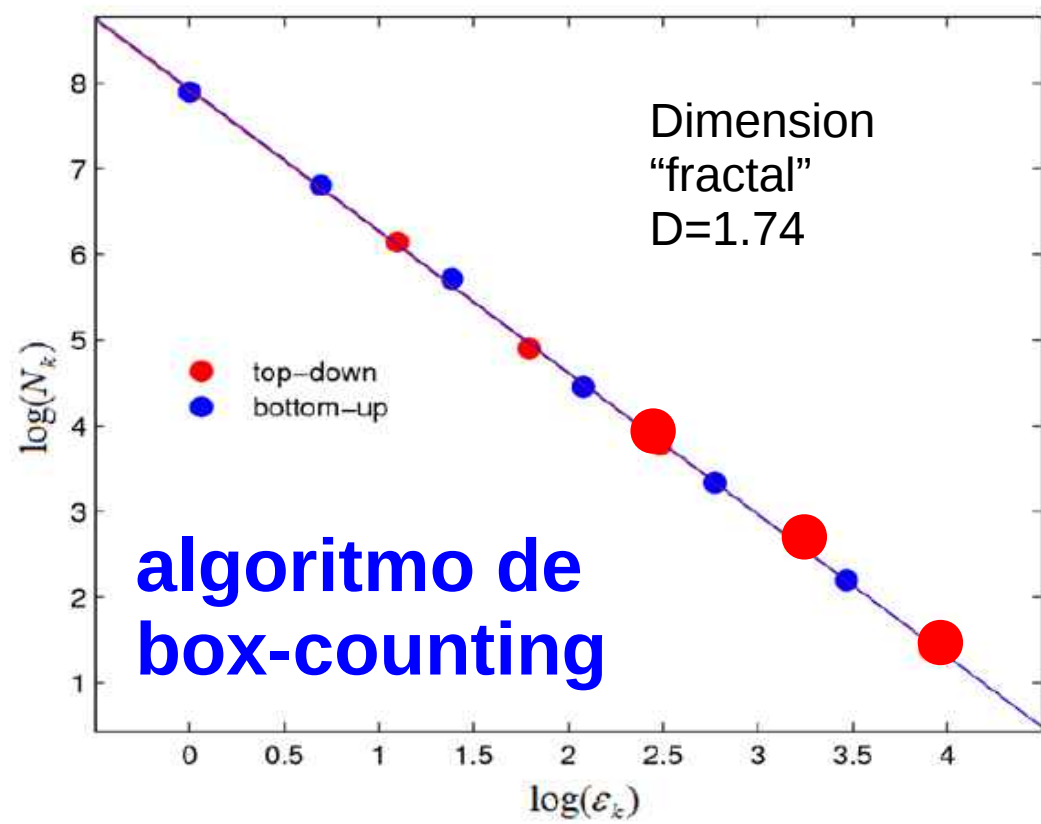
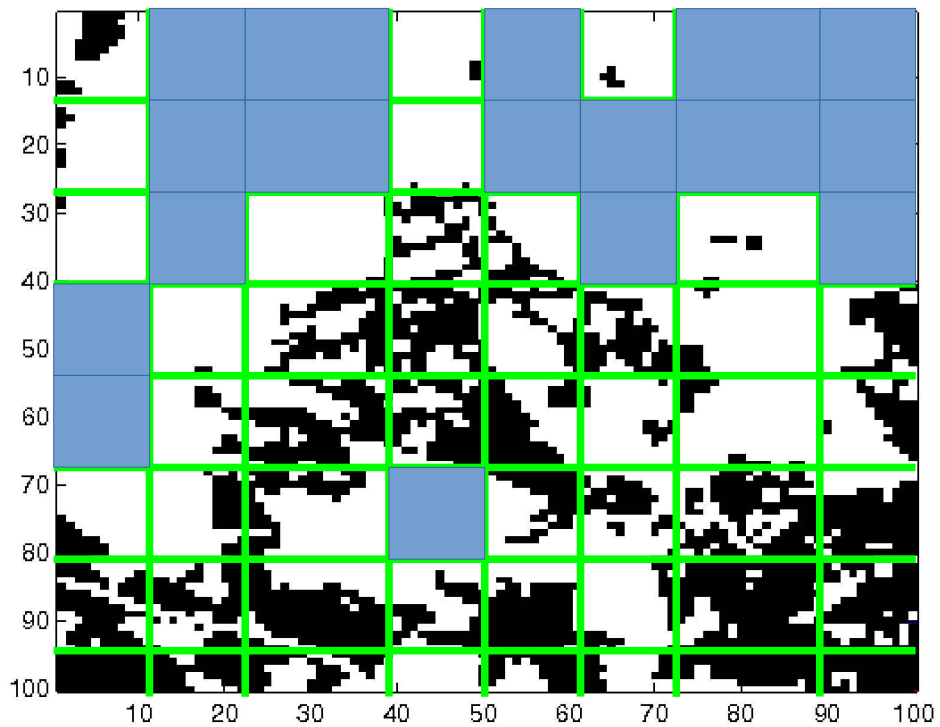
algoritmo de
box-counting

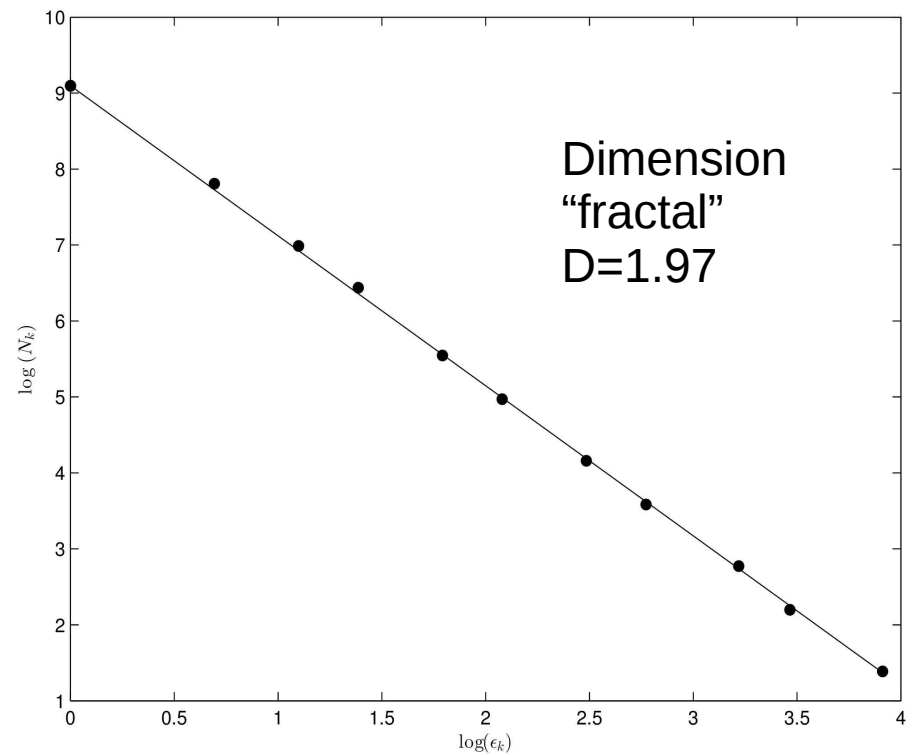
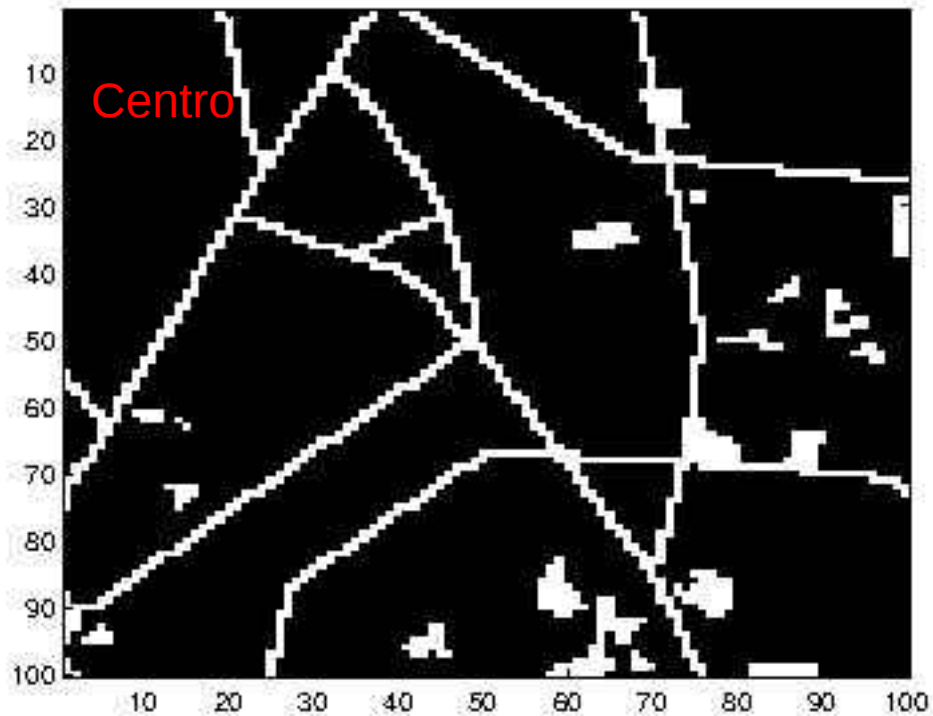
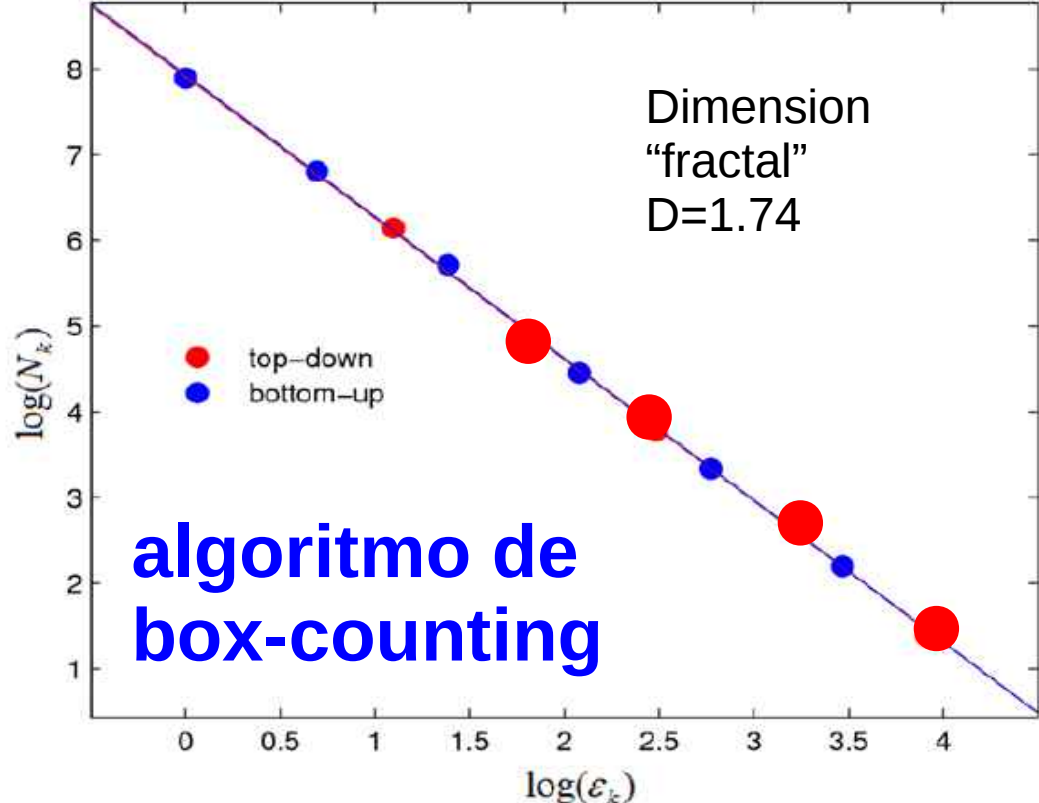
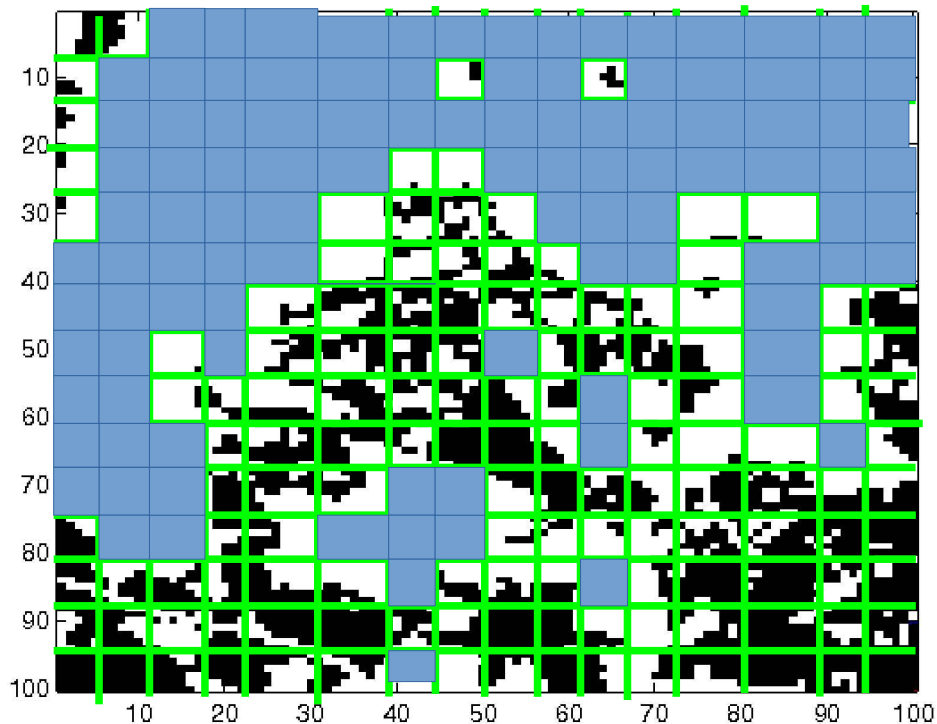




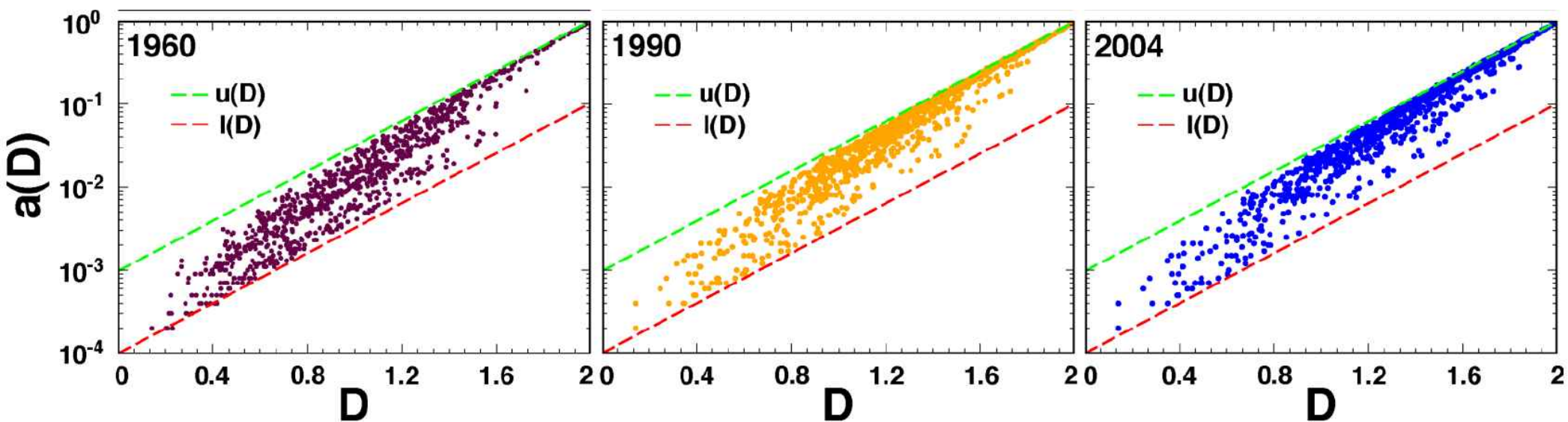
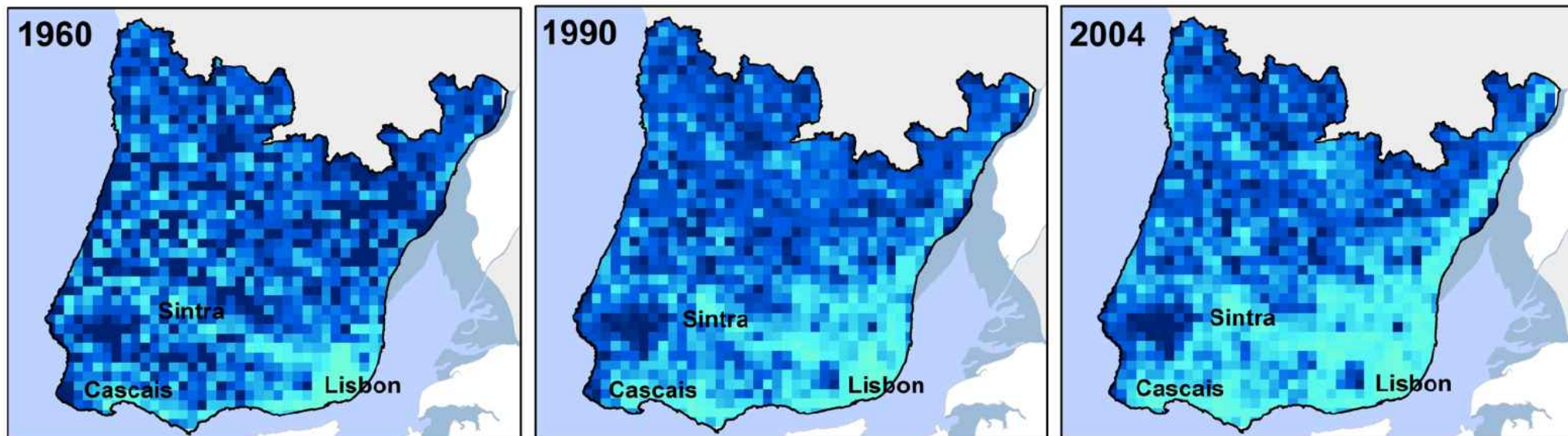








cell fractal dimension: **disperse**  **compact**



$$1 \leq N_k \leq (n/\epsilon_k)^2$$

$$L(D) \doteq 2^{mD} \leq A \leq n^2 (2^m)^{D-2} \doteq U(D)$$

Una caja negra:



D

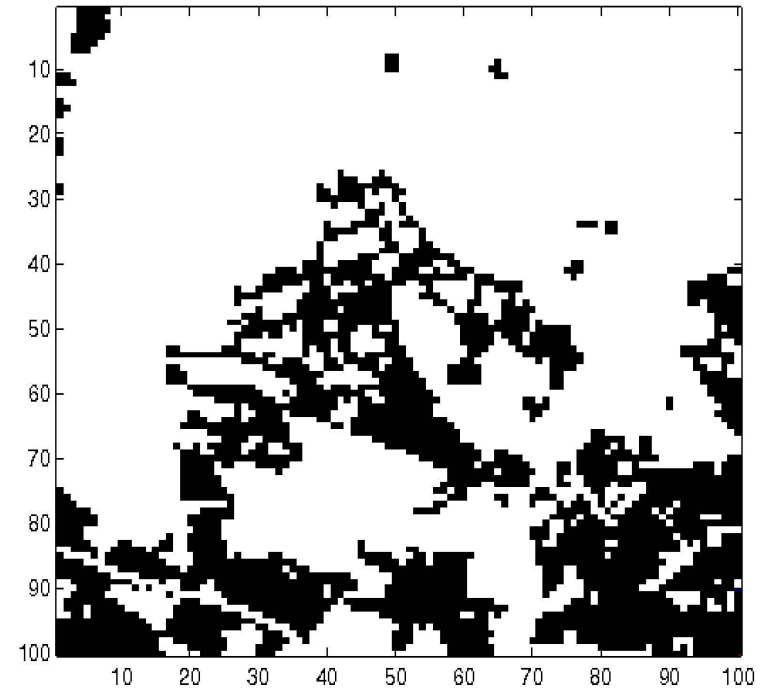
sólo se sabe que
tiene adentro
una configuración
de dimensión D
¿Cuánto no se
sabe?

Una caja negra:



sólo se sabe que
tiene adentro
una configuración
de dimensión D
¿Cuánto no se
sabe?

Por ejemplo:

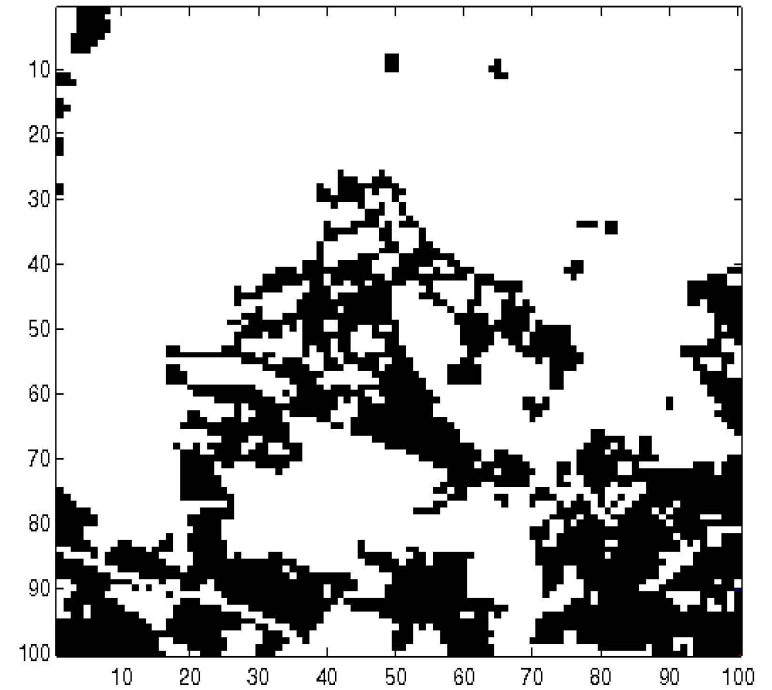


Una caja negra:



sólo se sabe que
tiene adentro
una configuración
de dimensión D
¿Cuánto no se
sabe?

Por ejemplo:



Resp.: Entropía

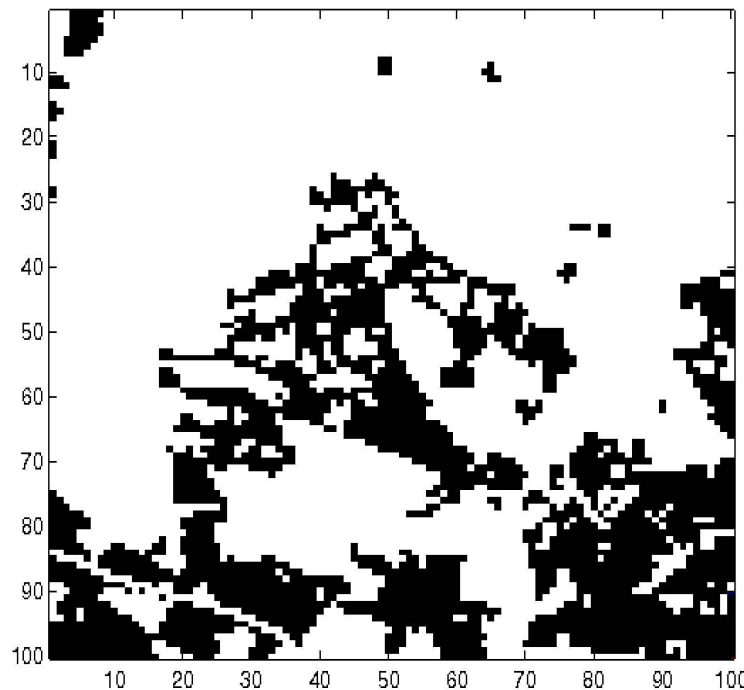
$$S(D) = \log \Omega(D)$$

Una caja negra:



sólo se sabe que
tiene adentro
una configuración
de dimensión D....
¿Cuánto no se
sabe?

Por ejemplo:



Resp.: Entropía

$$S(D) = \log \Omega(D)$$

NÚMERO TOTAL DE CONFIGURACIONES CON DIMENSIÓN D:

$$\Omega(D) = \sum_{A=2^{mD}}^{\lambda^2(2^{m-1})^{D-2}} \prod_{k=1}^m \binom{4A2^{-Dk}}{2^{-D}A2^{-Dk}} {}_4F_3 \left(W_k, \frac{1}{4} + W_k, \frac{1}{2} + W_k; \frac{1}{4} - A2^{-Dk}, \frac{1}{2} - A2^{-Dk}, \frac{3}{4} - A2^{-Dk}; 1 \right)$$

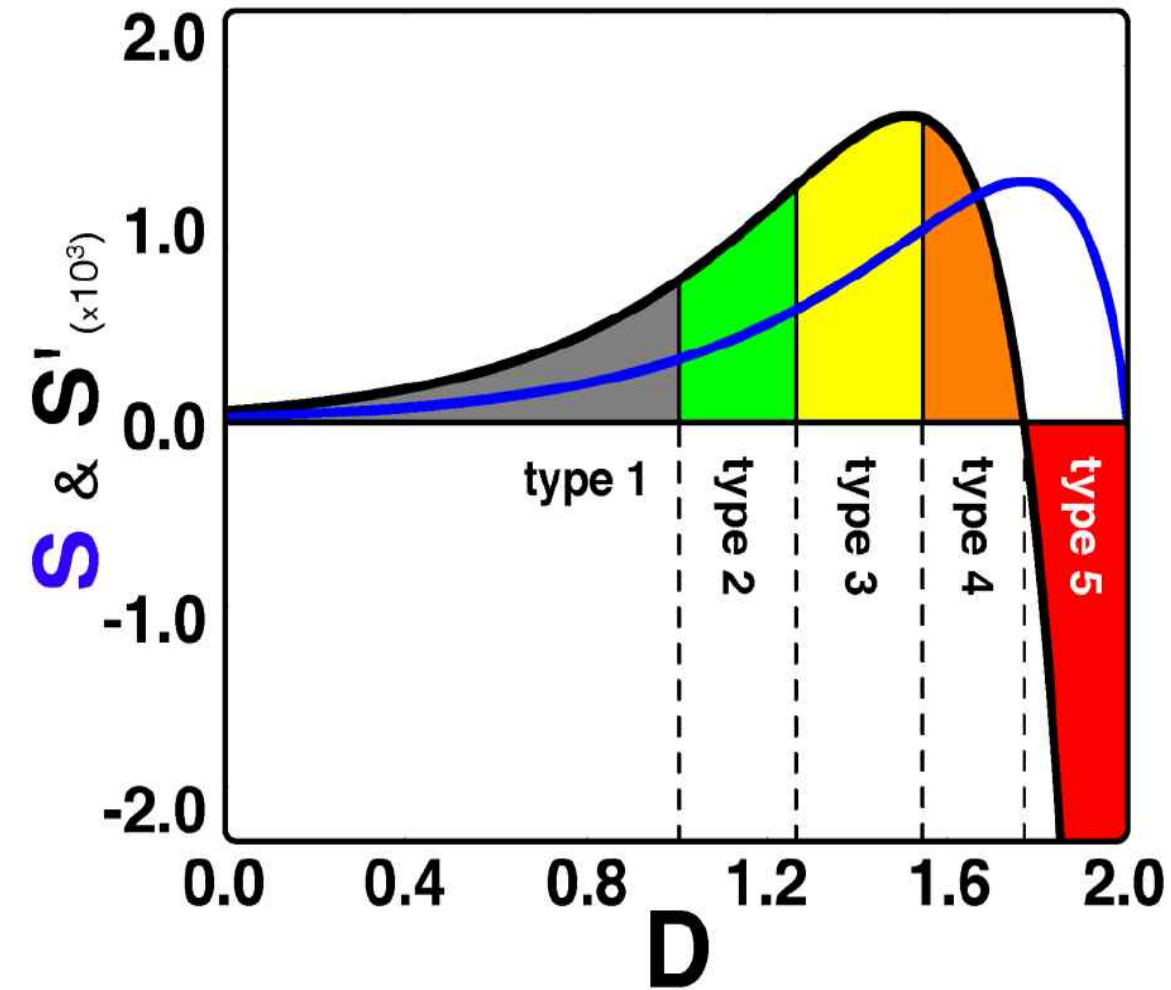
$$W_k = (2^{D-2} - 1)A2^{-Dk}$$

λ = lado de cada celda (en pixeles)

$$m = \lceil \log_2(\lambda/2) \rceil$$

Regímenes de la Entropía

$$S(D) = \log \Omega(D)$$

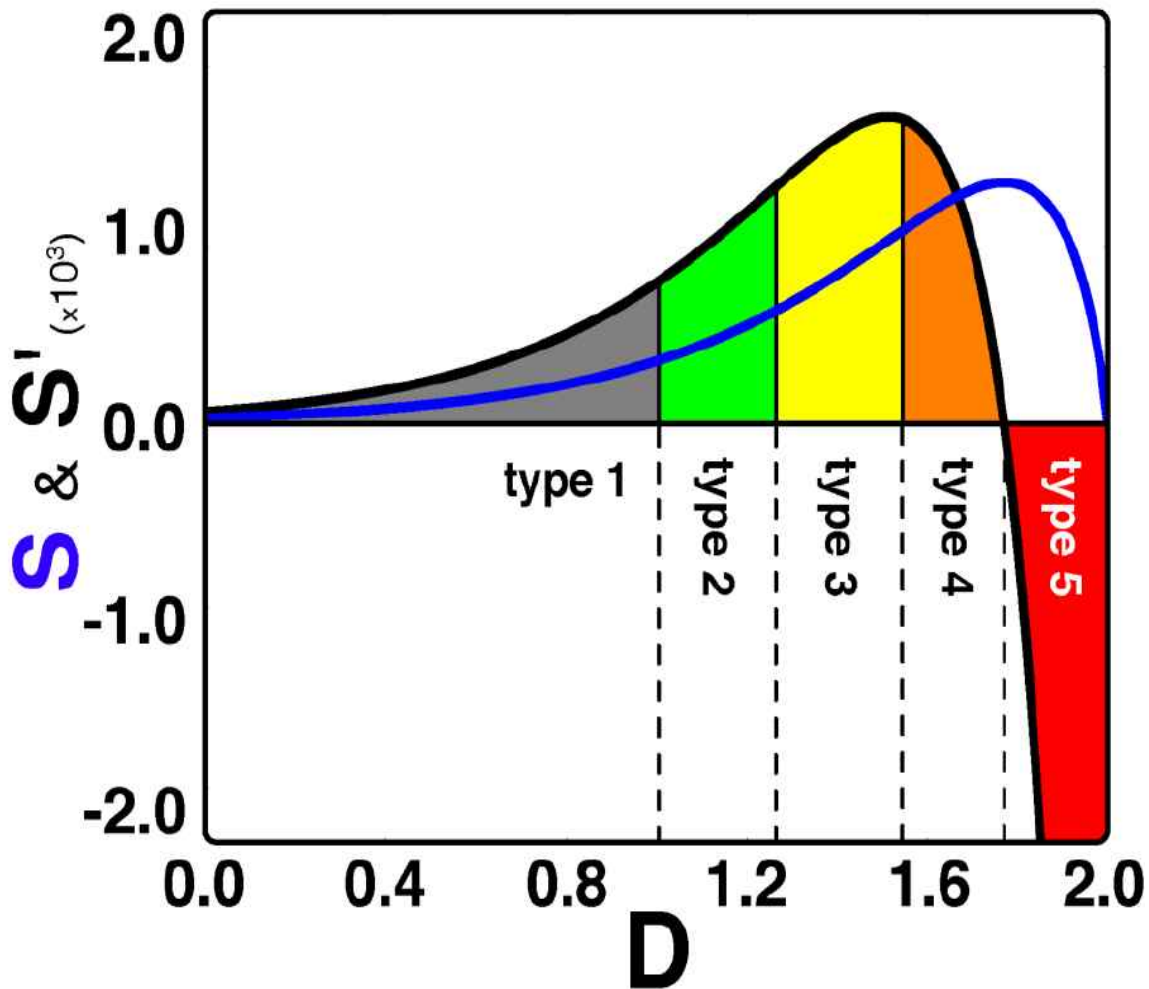


Regímenes de la Entropía



Regímenes urbanos

$$S(D) = \log \Omega(D)$$

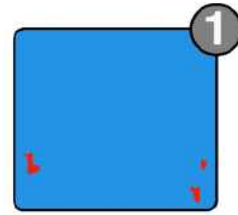
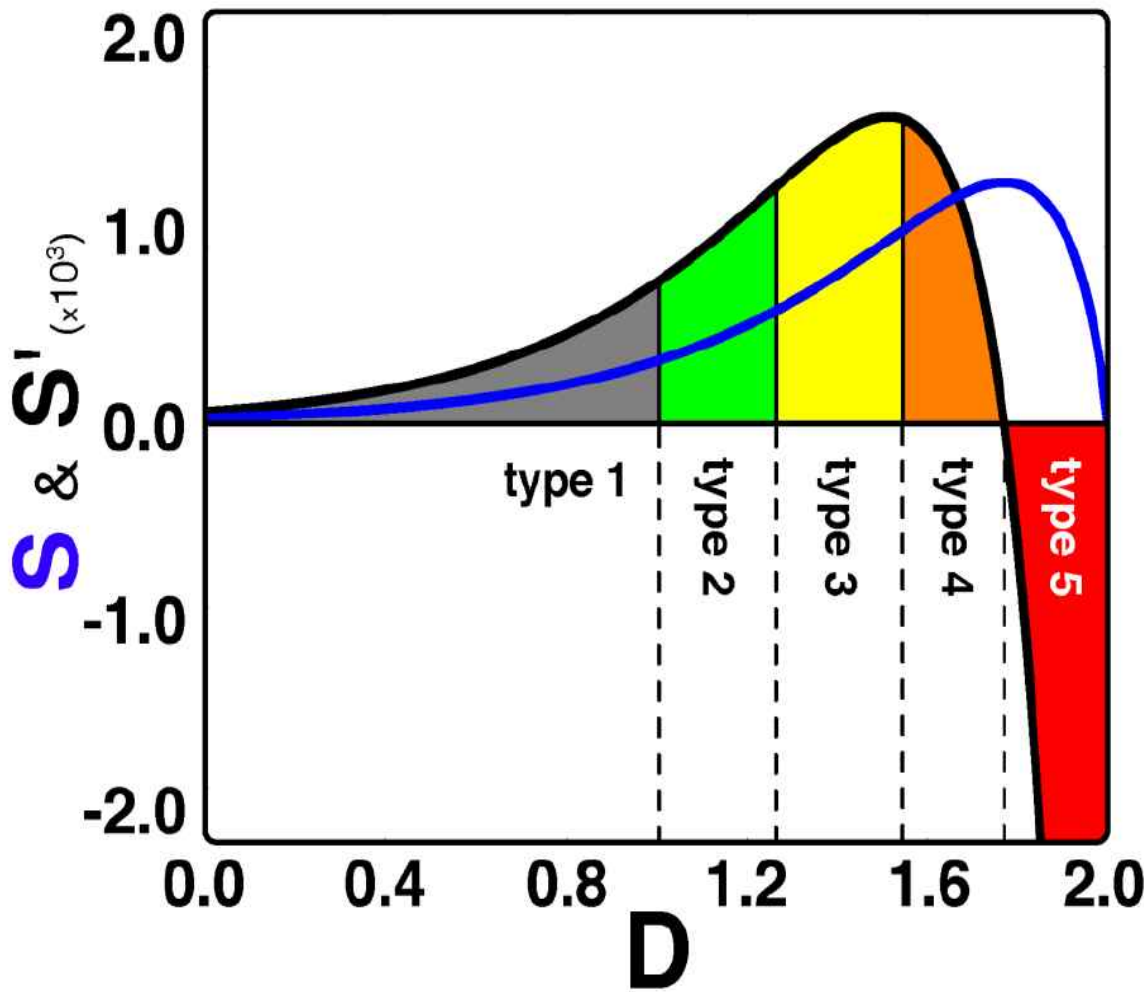


Regímenes de la Entropía



Regímenes urbanos

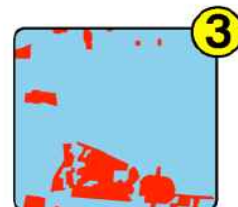
$$S(D) = \log \Omega(D)$$



Type 1 ($D \leq 1.00$)
small & isolated
built-up areas



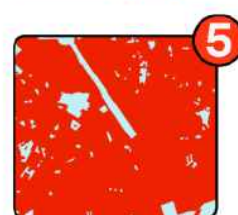
Type 2 ($1.00 < D \leq 1.26$)
dispersed built-up areas



Type 3 ($1.26 < D \leq 1.54$)
metastatic growth

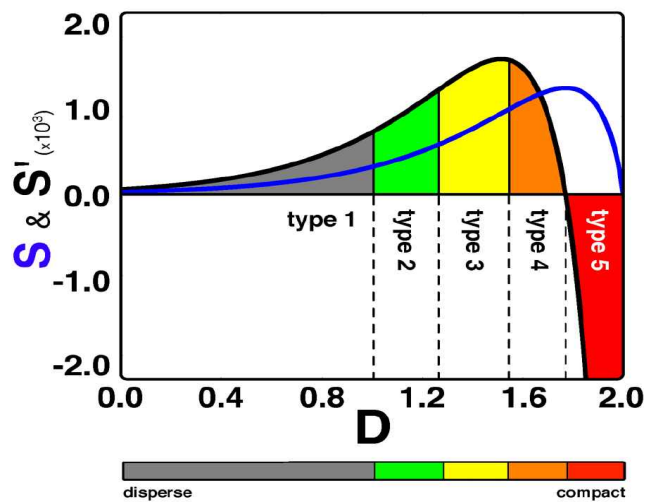


Type 4 ($1.54 < D \leq 1.78$)
rapid growth & metastatic
consolidation

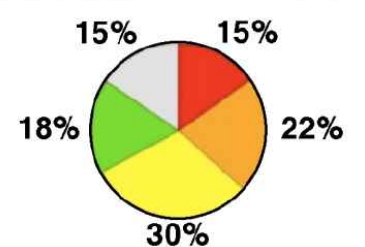
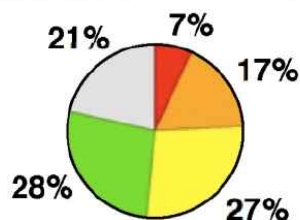
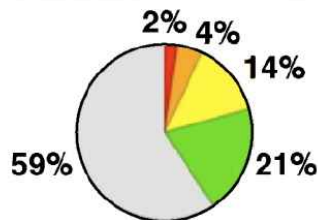
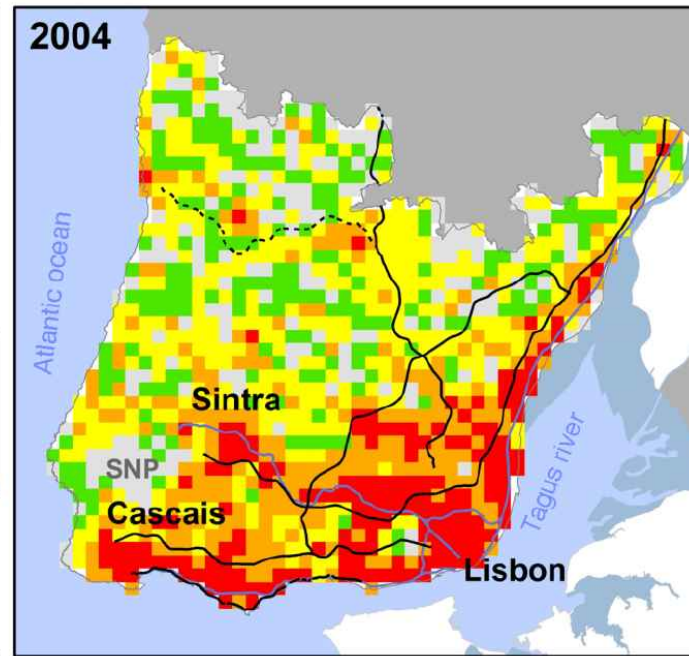
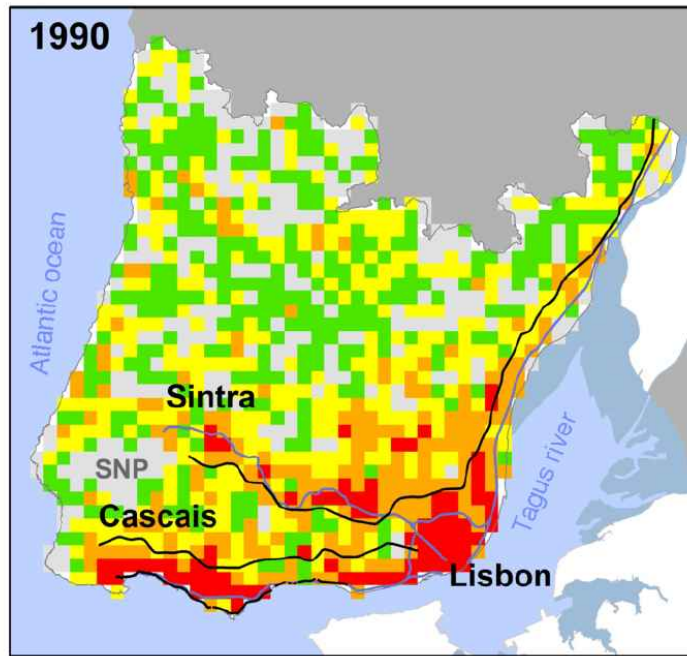
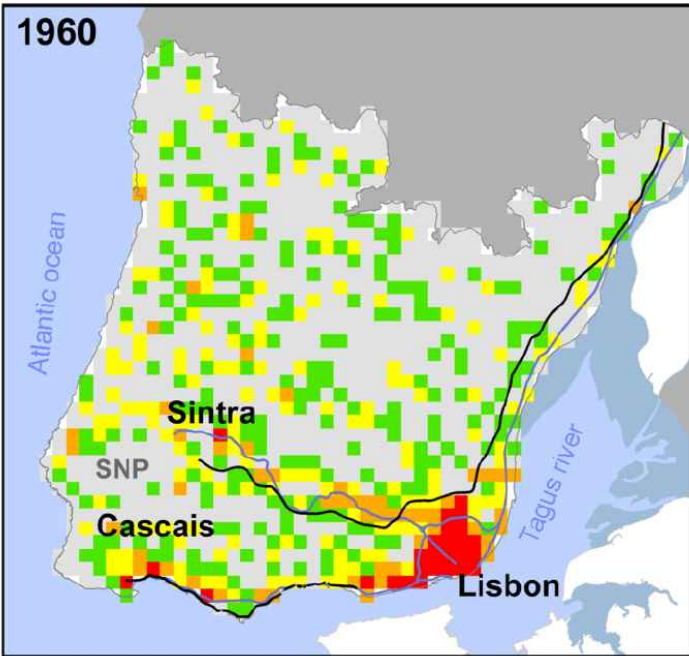


Type 5 ($1.78 < D \leq 2.00$)
consolidated
compact areas





- 1 **Type 1** ($D \leq 1.00$)
small & isolated built-up patches
- 2 **Type 2** ($1.00 < D \leq 1.26$)
dispersed built-up areas
- 3 **Type 3** ($1.26 < D \leq 1.54$)
metastatic growth
- 4 **Type 4** ($1.54 < D \leq 1.78$)
rapid growth & metastatic consolidation
- 5 **Type 5** ($1.78 < D \leq 2.00$)
consolidated compact areas



region types: 1 2 3 4 5



CIDADES

A MATEMÁTICA TIROU O RETRATO AO CRESCIMENTO URBANO CAÓTICO E PODE AJUDAR A TRAVAR O DESASTRE

Ciência, p26/27

Cartografia fractal permite monitorizar crescimento urbano

Cidades

O crescimento urbano moderno é um processo complexo que pode tornar-se descontrolado. Um programa informático de autoria portuguesa, que recorre à matemática dos chamados “objectos fractais”, poderá ajudar a evitar o pior

Ana Gerschenfeld

Uma equipa multidisciplinar de cientistas portugueses conseguiu classificar os diferentes tipos de crescimento urbano moderno para, de forma objectiva, com base em critérios matemáticos, identificar as zonas onde esse crescimento poderá tornar-se descontrolado se nada for feito. A utilização desta nova forma de cartografia, afirmam os autores do trabalho, cujos resultados foram publicados esta semana na revista *online Nature Scientific Reports*, poderia permitir intervenções precoces de planeamento urbano.

Há já mais de um século que a expansão das grandes cidades do mundo se tornou “explosiva”. Os centros urbanos não têm parado de alargar as suas margens, ao mesmo tempo que foram surgindo novas urbanizações. Numa primeira fase, as novas localidades eram pequenas e periféricas, mas, aos poucos, foram ficando aglomera-

das à cidade inicial, para acabar por formar os subúrbios que todos conhecemos. E estes continuam, ainda hoje, a crescer por vezes como autênticas “florestas” de betão, invadindo de forma caótica e agressiva a paisagem natural circundante.

As áreas metropolitanas portuguesas – e em particular a de Lisboa – são disso um claro exemplo. Mas estão longe de ser casos únicos. Sydney, Telavive, Londres ou Tóquio também apresentam este tipo de crescimento. Ao contrário das cidades medievais, que permaneciam confinadas nas suas muralhas, os contornos das megalópoles actuais são altamente irregulares. Foi com base nesta e noutras características da geografia urbana que os especialistas começaram, a partir dos anos 1980, a considerar as cidades como “objectos fractais” – e a estudar a sua organização interna e a sua evolução no tempo com a ajuda desta ferramenta matemática.

Até aqui, a maior parte dos estudos deste tipo calculava a chamada “dimensão fractal” global, média, das zonas urbanas analisadas, mostrando que essa dimensão aumentava ao longo do tempo. “Nós fomos mais longe”, diz ao PÚBLICO Jorge

Pacheco, matemático das universidades do Minho e de Lisboa e líder da equipa autora do trabalho.

Dos esparguetes às cidades

Os fractais são objectos abstractos, de contornos altamente irregulares e fragmentados – e cuja irregularidade e fragmentação se mantêm seja qual for o “zoom” utilizado para olhar para eles, isto é, seja qual for a resolução escolhida. Ora, as grandes cidades de hoje apresentam justamente características fractais: as suas fronteiras são fragmentadas e mal definidas e a organização interna dos seus espaços construídos é tão complexa à escala de um bairro, com os seus prédios e zonas públicas, como à escala de um subúrbio, com as suas zonas de construções ora compactas, ora dispersas.

Um ponto, uma linha, uma superfície e o espaço físico em que vivemos são respectivamente objectos matemáticos de dimensão 0, 1, 2 e 3 – e os objectos fractais não fogem à regra: também possuem uma dimensão. Só que essa dimensão não vale nem 1, nem 2, nem 3, nem qualquer número inteiro, mas tem um valor intermédio. “Um esparguete tem dimensão 1, um quadrado com-

pacto dimensão 2, mas, aqui, a urbanização tem globalmente uma dimensão fractal de 1,6”, explica-nos Jorge Pacheco, apontando para uma das coloridas imagens “pixelizadas” que mostram o crescimento urbano na margem norte da Área Metropolitana de Lisboa (AML), que ilustram o artigo agora publicado e que reprodizimos à direita.

Para obter estas “radiografias” de tecido urbano, a equipa portuguesa – composta ainda pela geógrafa Sara Encarnação e pelo urbanista José Tenedório, do Centro de Estudos de Geografia e Planeamento Regional da Universidade Nova de Lisboa; e pelos matemáticos Marcos Gaudiano e Francisco Santos, do Instituto para a Investigação Interdisciplinar da Universidade de Lisboa – recorreu a mapas e imagens da AML que remontam aos anos 1960, 1990 e 2004 e começou por os digitalizar. Coube a Sara Encarnação uniformizar esses registos de forma a construir três imagens que fossem comparáveis entre si, “o que não foi trivial”, diz Jorge Pacheco. Cada uma das imagens resultantes foi depois dividida em células de um quilómetro quadrado – e essas células foram por sua vez subdivididas em “pixels” de



Lisboa es un caos Urbanístico:
* alto urban sprawl
* crecimiento descontrolado

CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

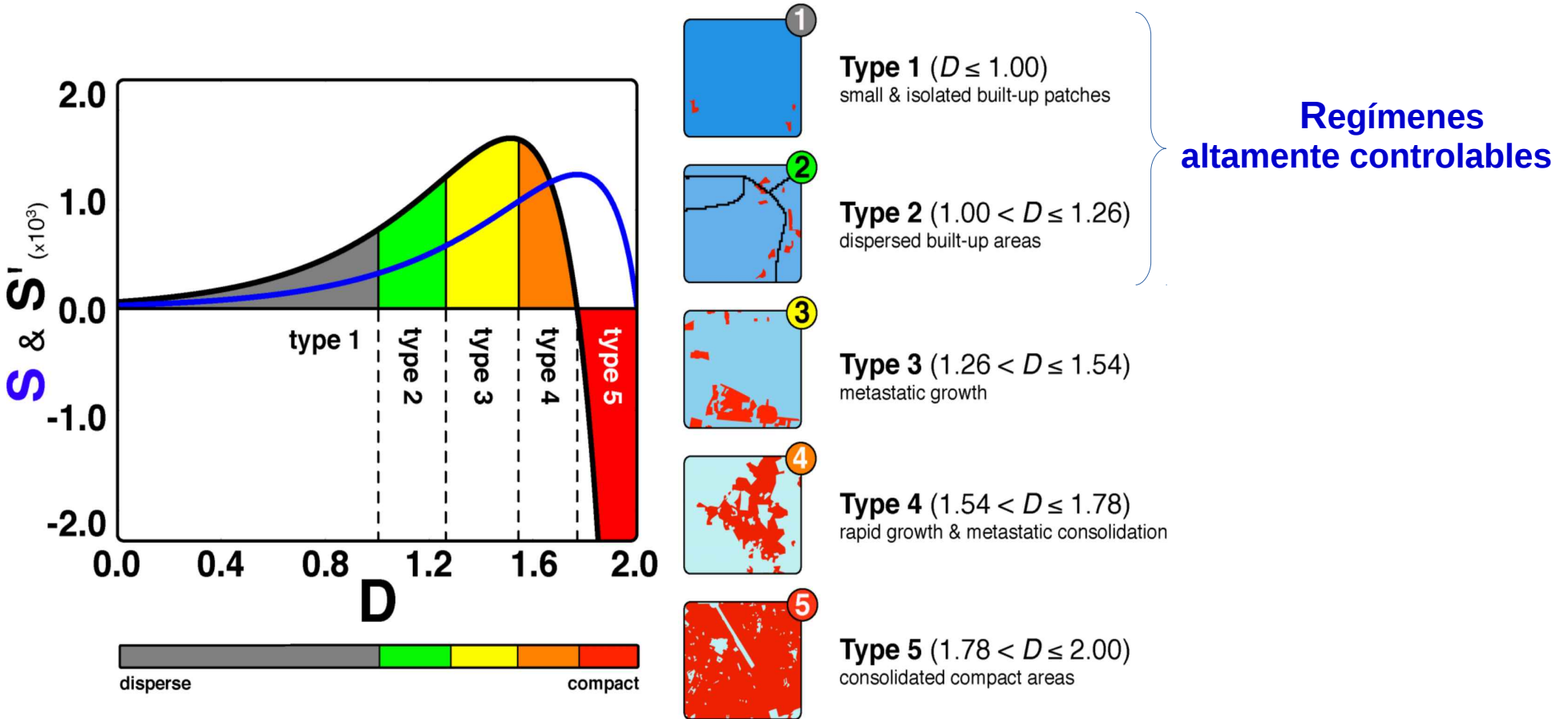
predictabilidad,

previsibilidad,

capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección

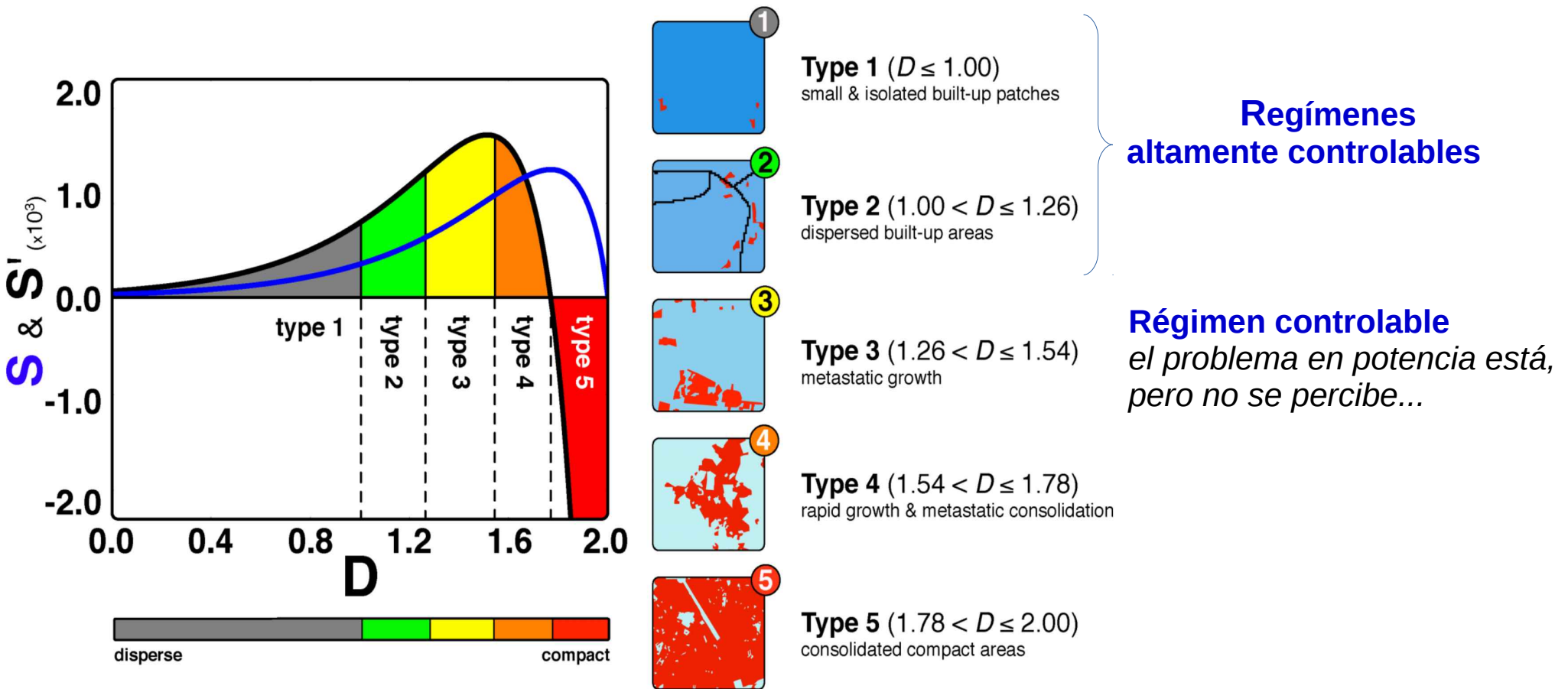
CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

predictabilidad,
previsibilidad,
capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección



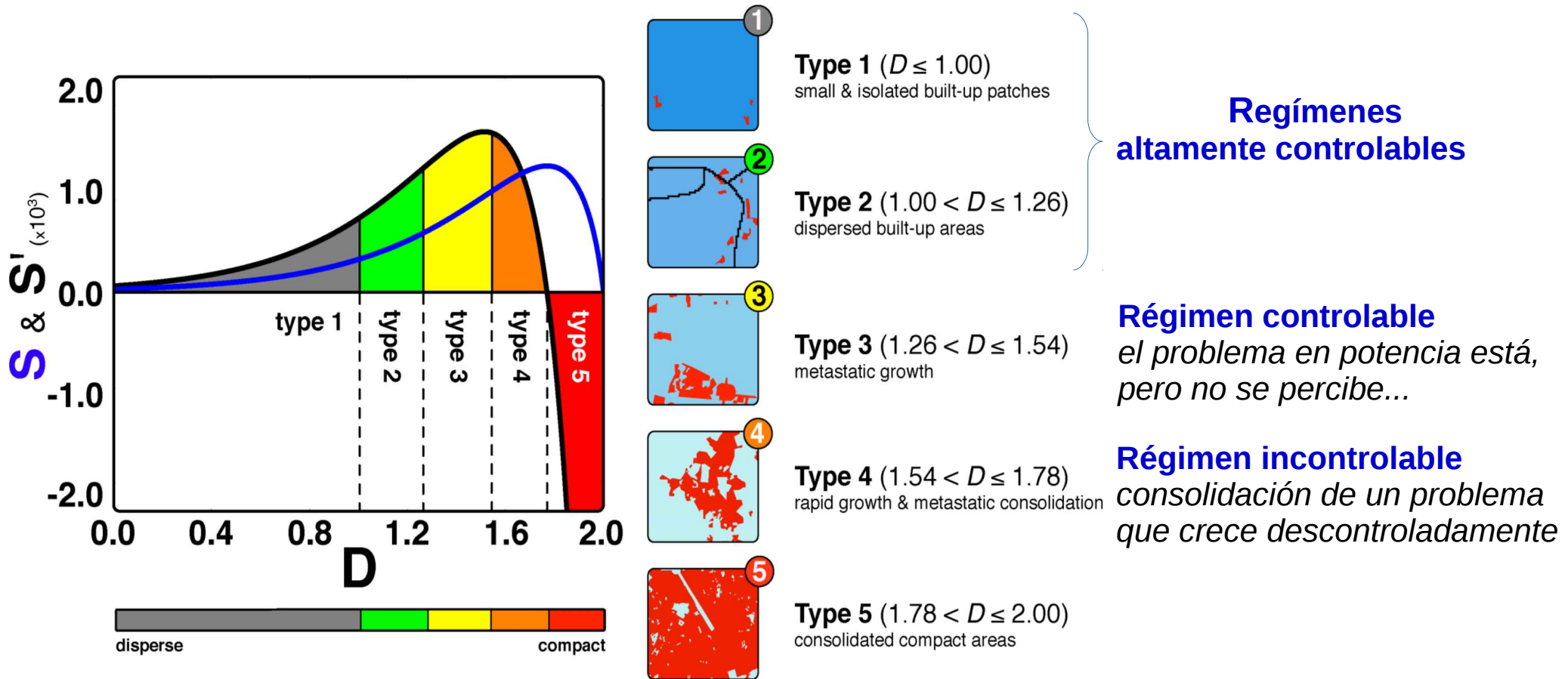
CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

predictabilidad,
previsibilidad,
capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección



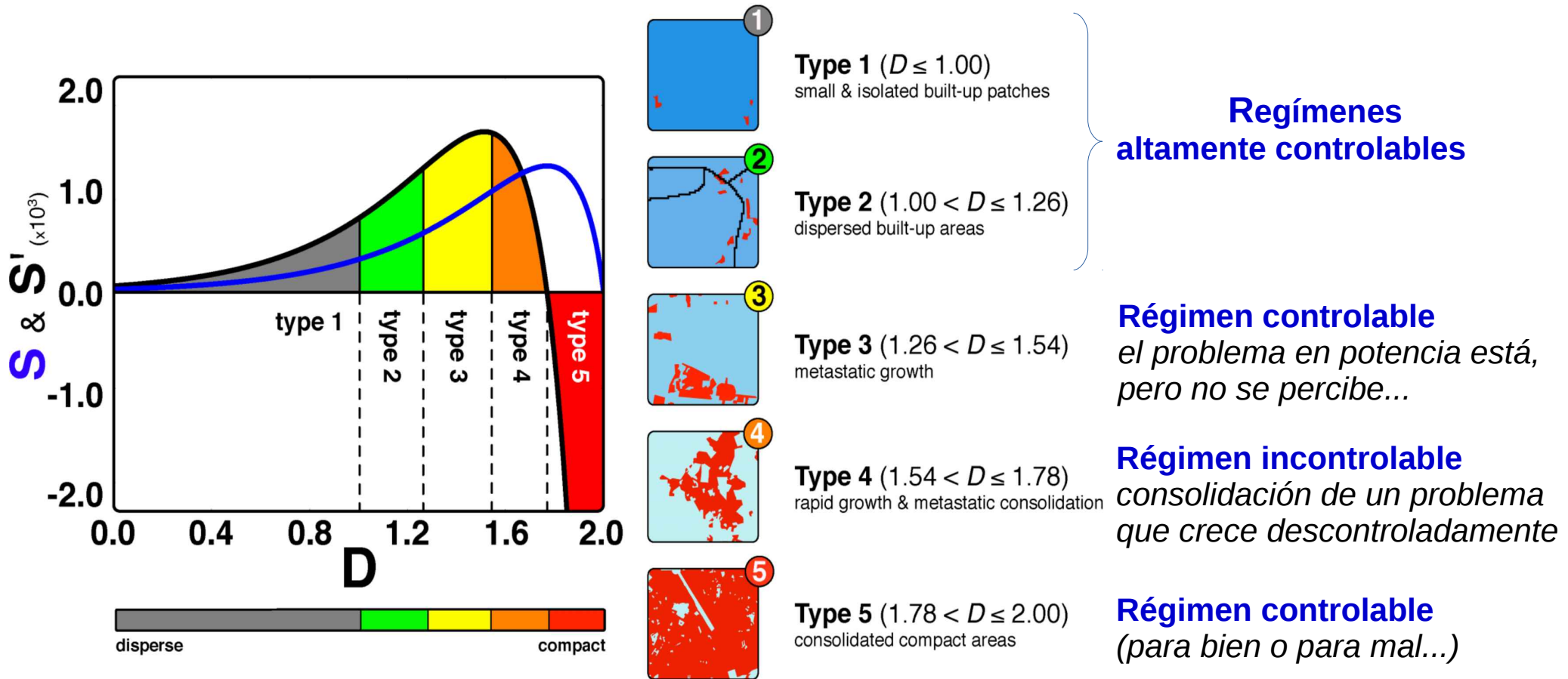
CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

predictabilidad,
previsibilidad,
capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección



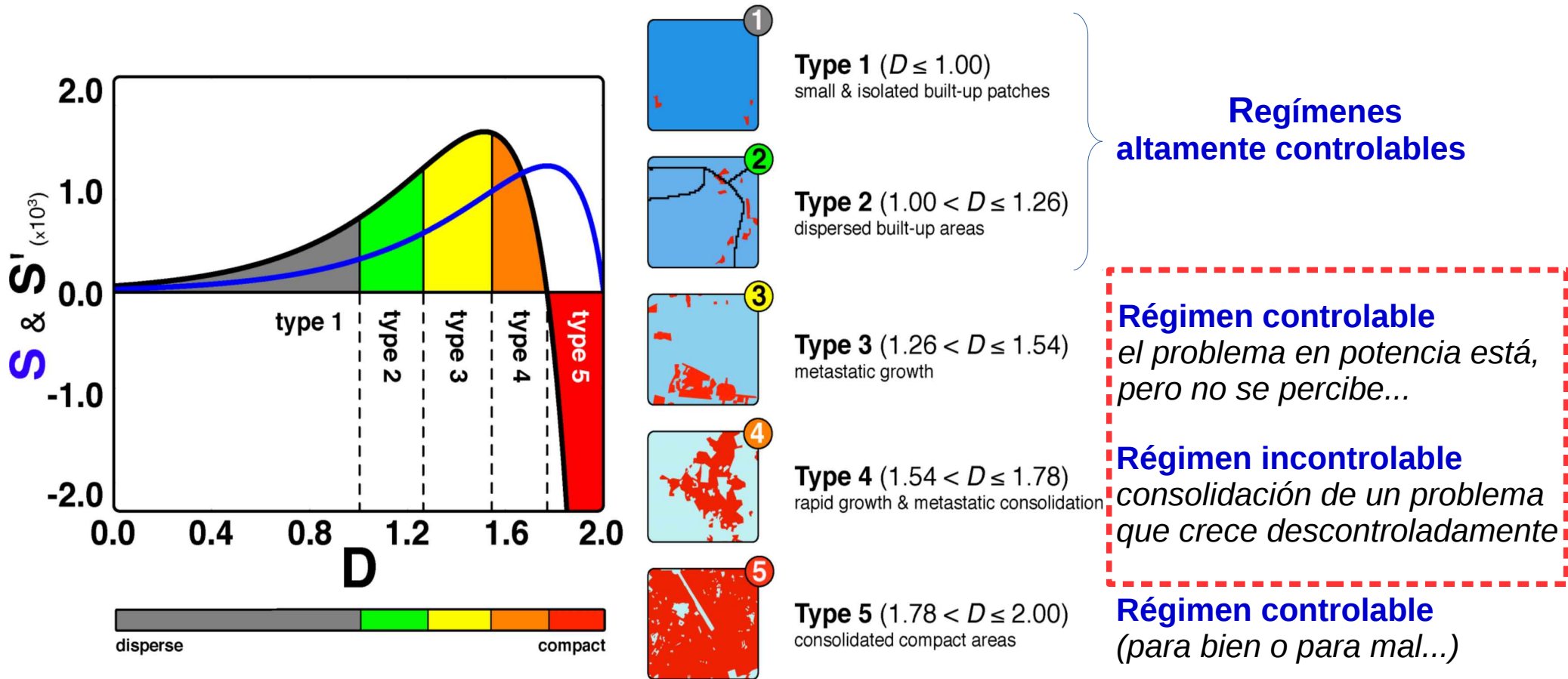
CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

predictabilidad,
previsibilidad,
capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección

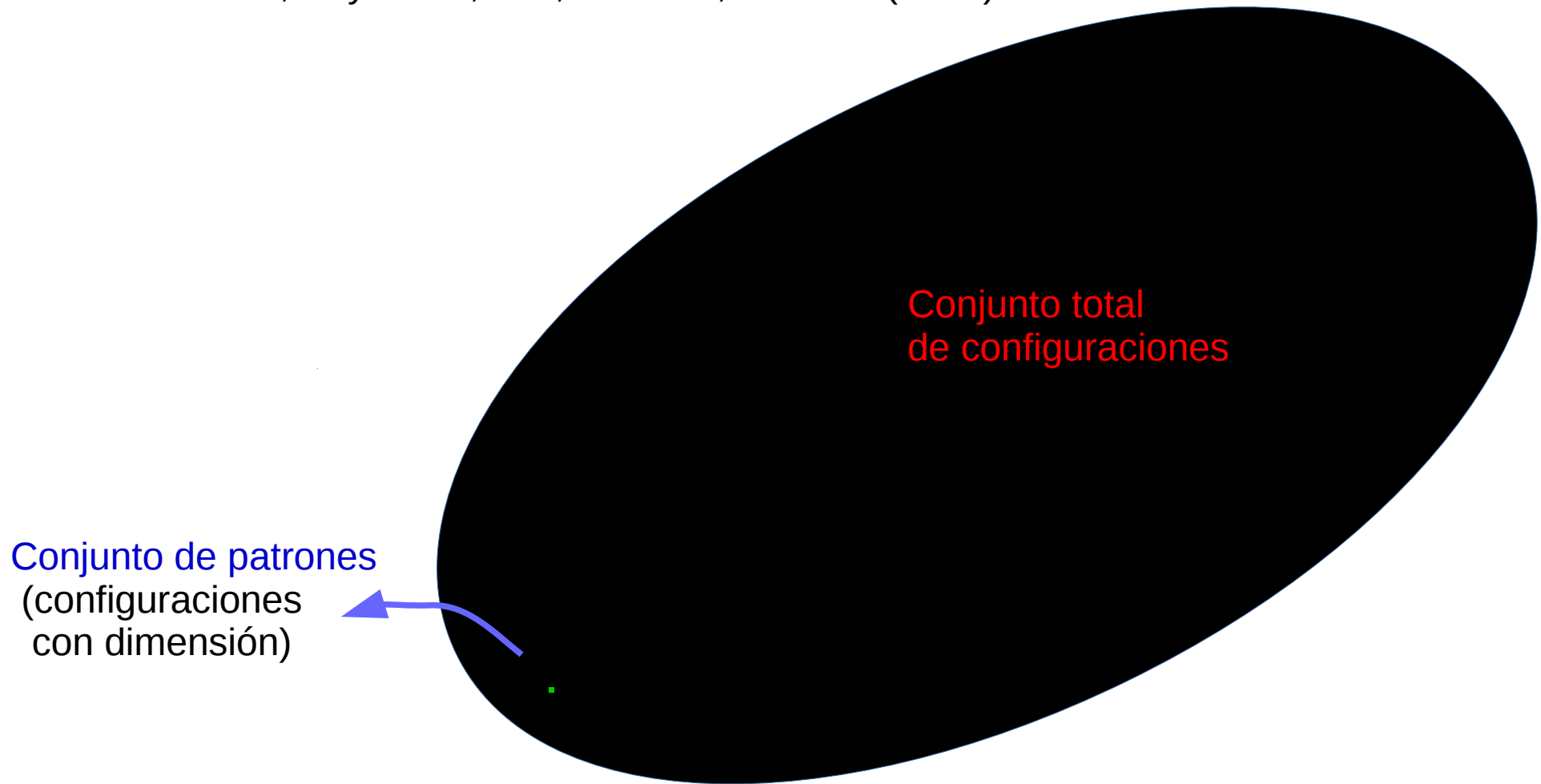


CONTROL (EN EL SENTIDO DE FILOSÓFICO DE LA INGENIERÍA):

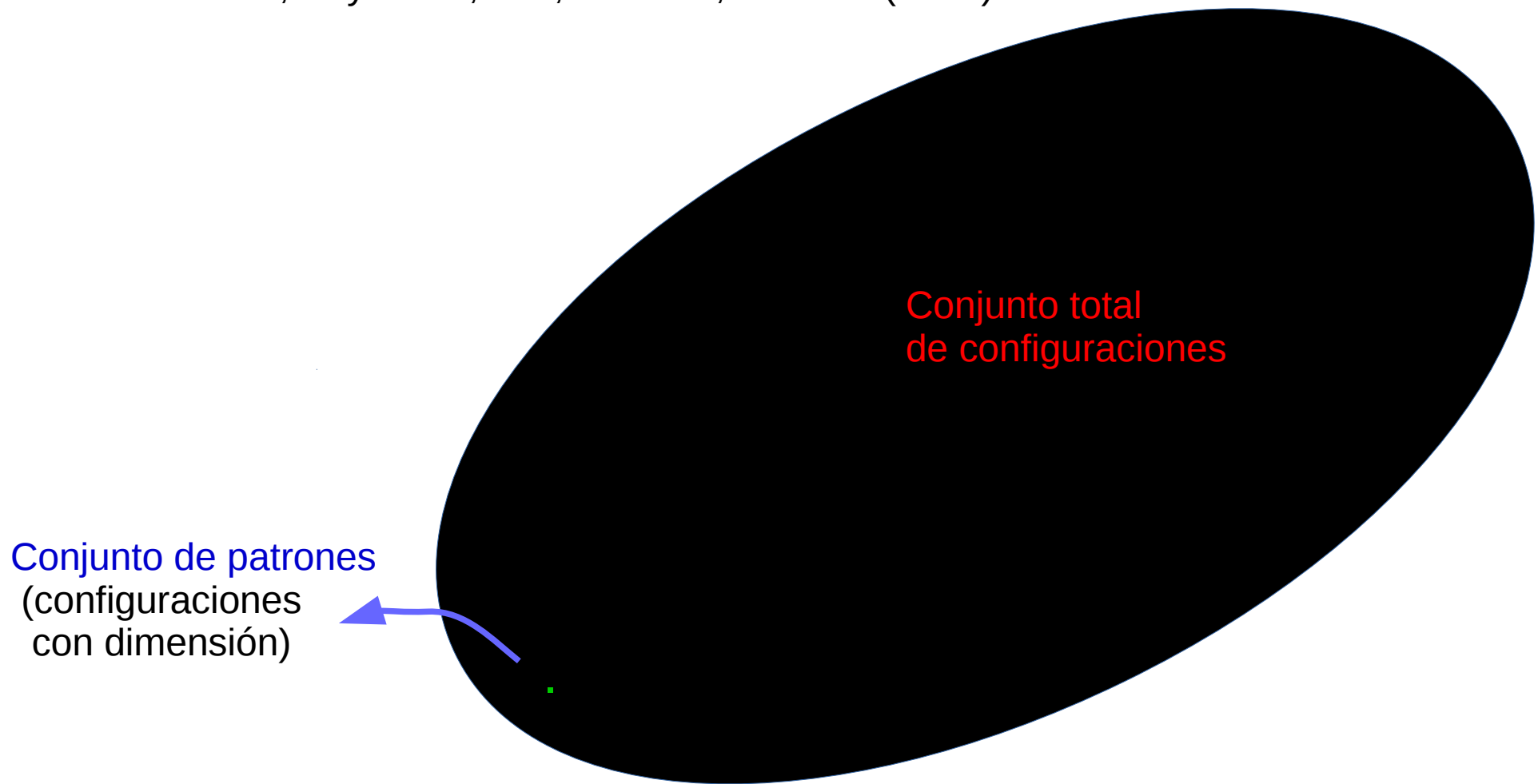
predictabilidad,
previsibilidad,
capacidad de conducir el sistema hacia un estado a elección



An entropical characterization for complex systems becoming out of control,
M. Gaudiano, Physica A, 440, 185-199, Elsevier (2015).



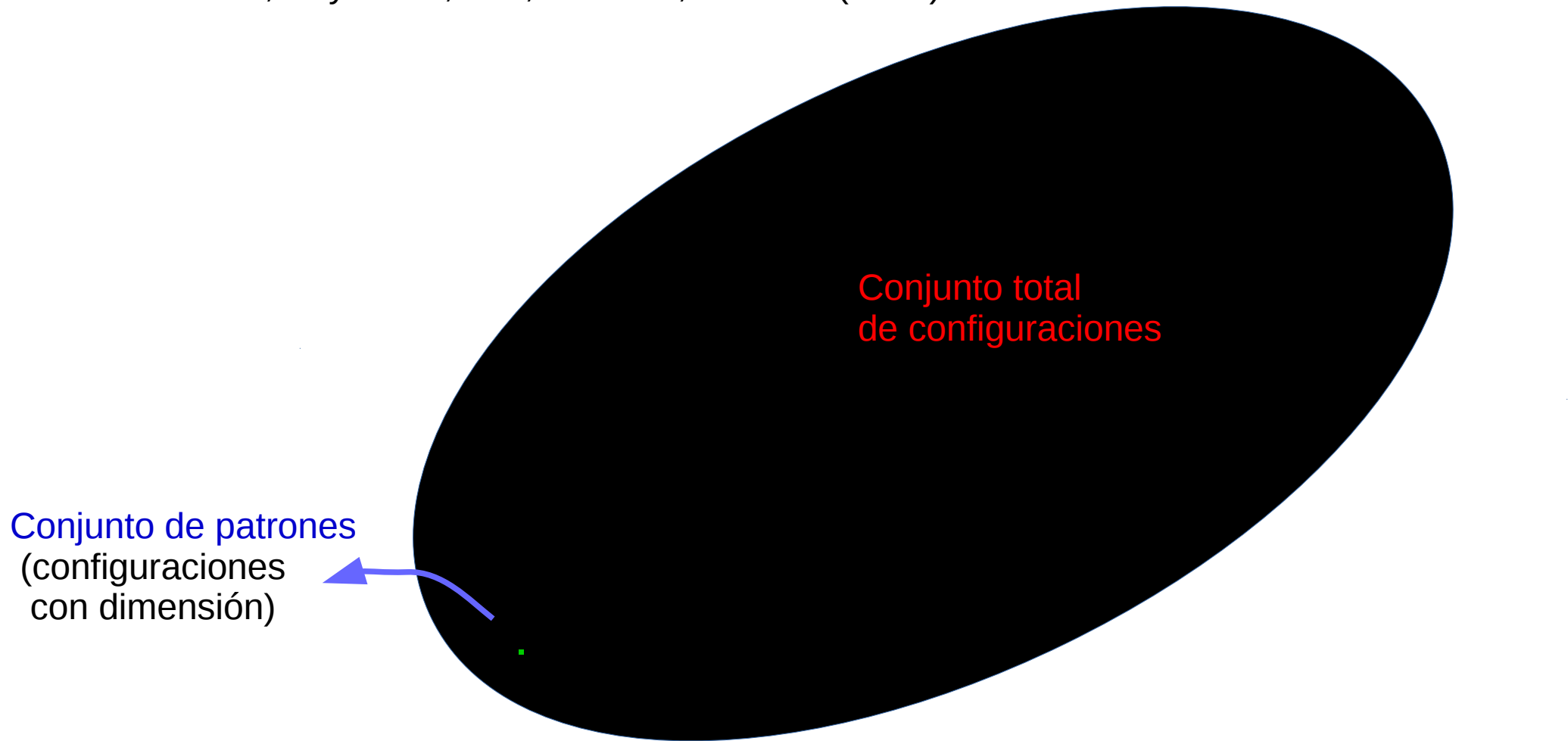
An entropical characterization for complex systems becoming out of control,
M. Gaudiano, Physica A, 440, 185-199, Elsevier (2015).



$$\lambda = 100, m = 5 \quad D = 0, \delta D, 2\delta D, 3\delta D, \dots, 2$$

$$\sum_{D=0}^{D=2} \Omega(D) \sim 10^{1300}$$

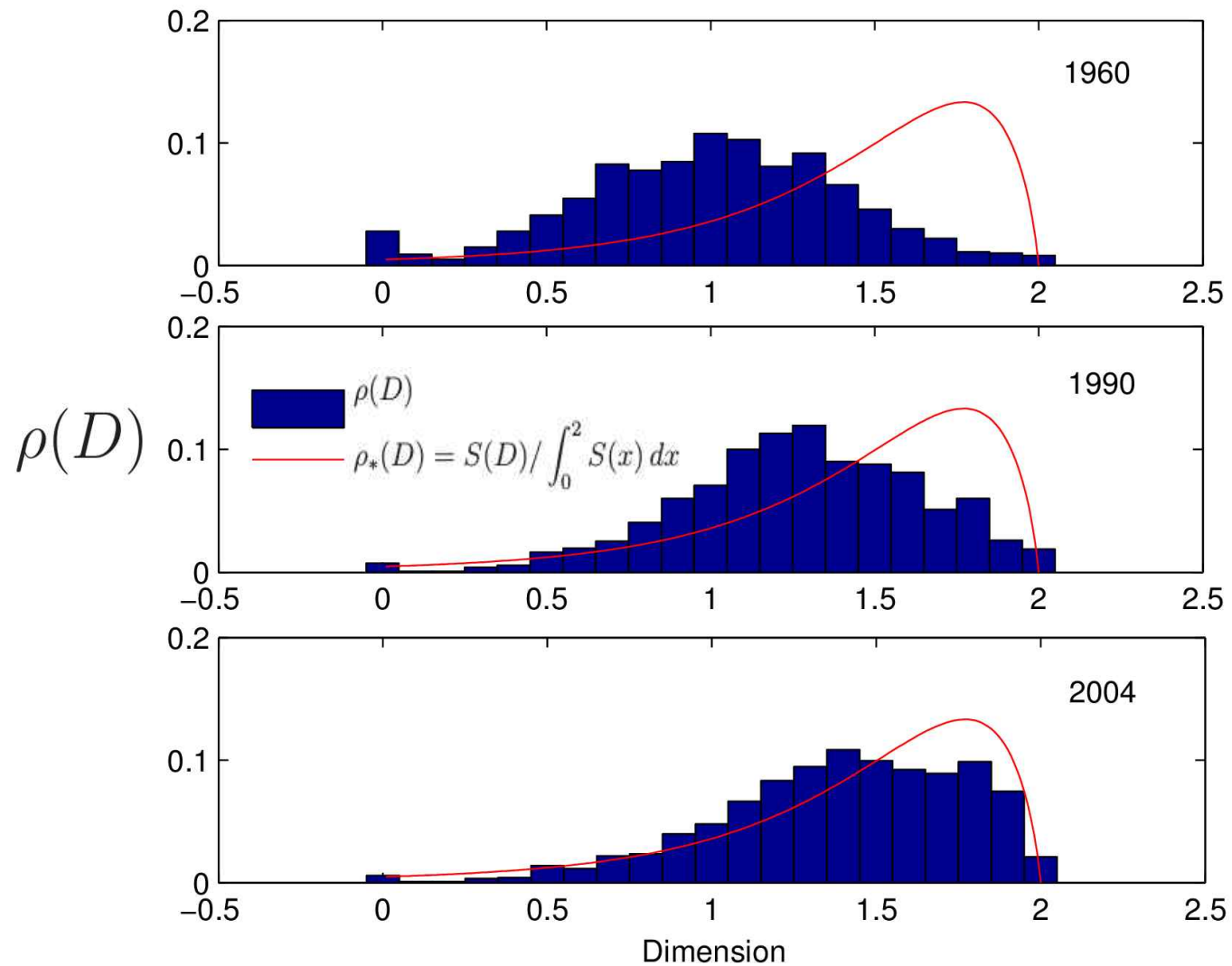
An entropical characterization for complex systems becoming out of control,
M. Gaudiano, Physica A, 440, 185-199, Elsevier (2015).



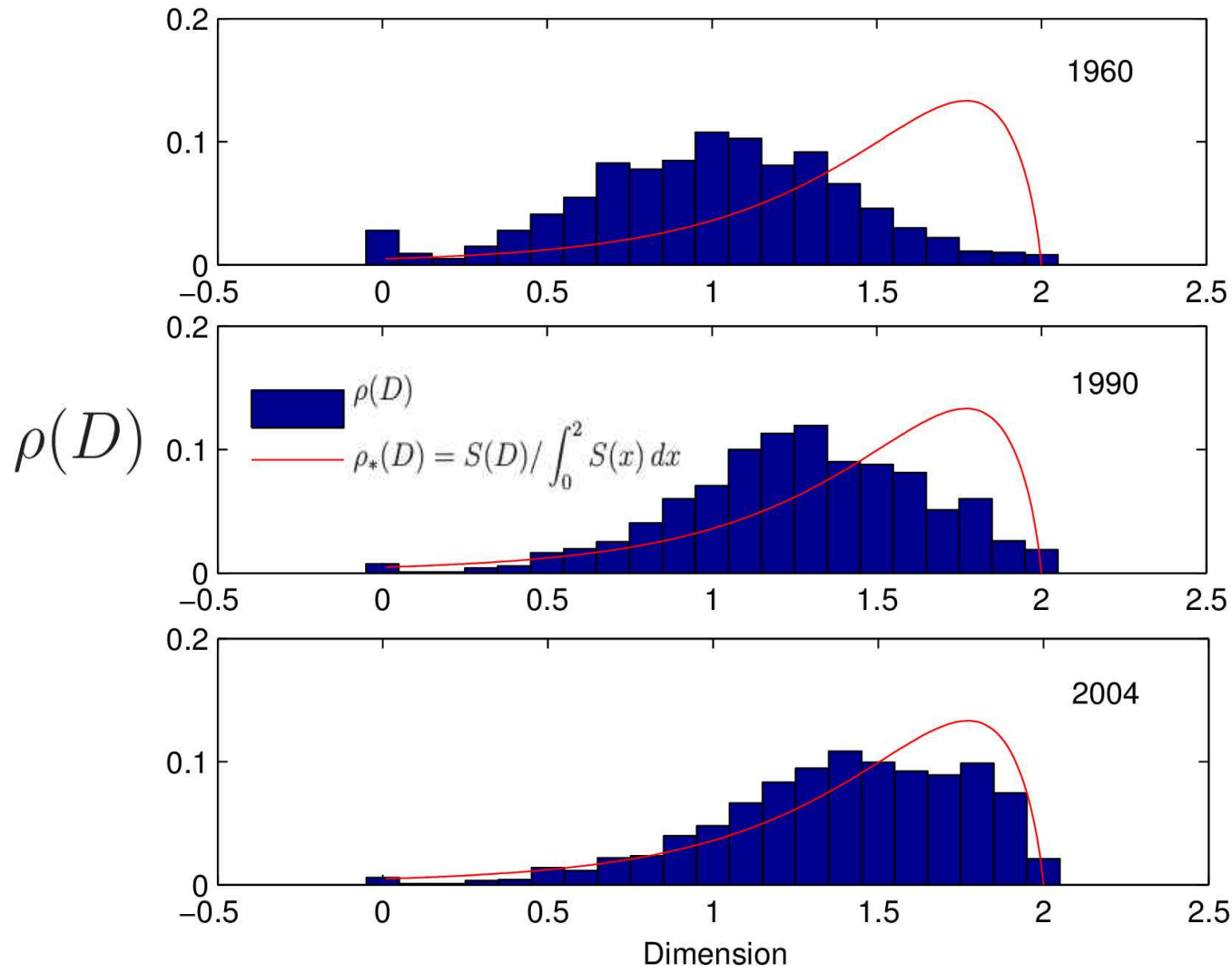
$$\lambda = 100, m = 5 \quad D = 0, \delta D, 2\delta D, 3\delta D, \dots, 2$$

$$\sum_{D=0}^{D=2} \Omega(D) \sim 10^{1300} \leq 10^{1300} \frac{2}{\delta D} \lll 2^{100^2} = 10^{3000}$$

$$\rho_*(D) = S(D) / \int_0^2 S(x) dx$$

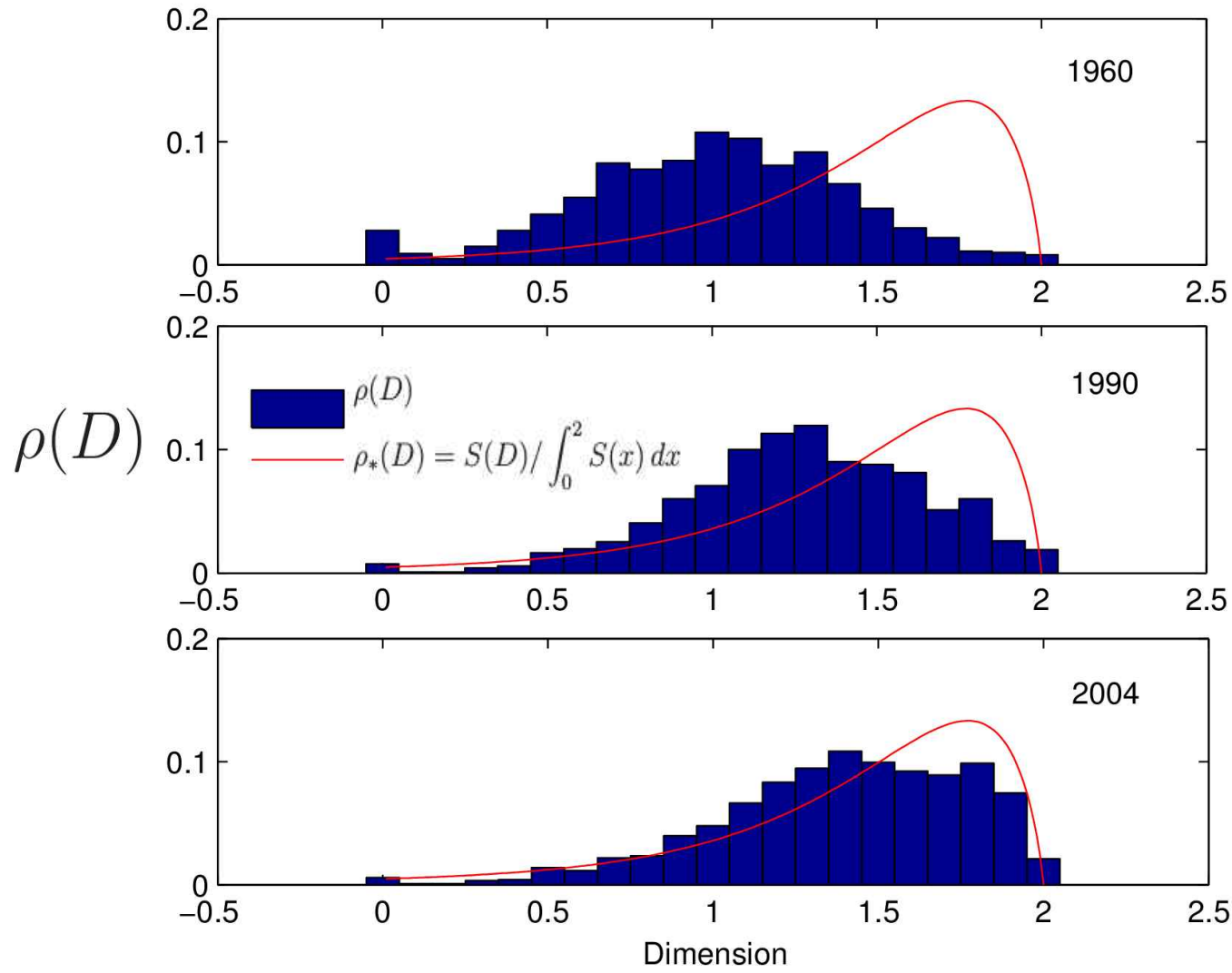


Sucesiva proximidad de $\rho(D)$ a $\rho_*(D) = S(D) / \int_0^2 S(x) dx$:
 evolución en la **ausencia de control** ...



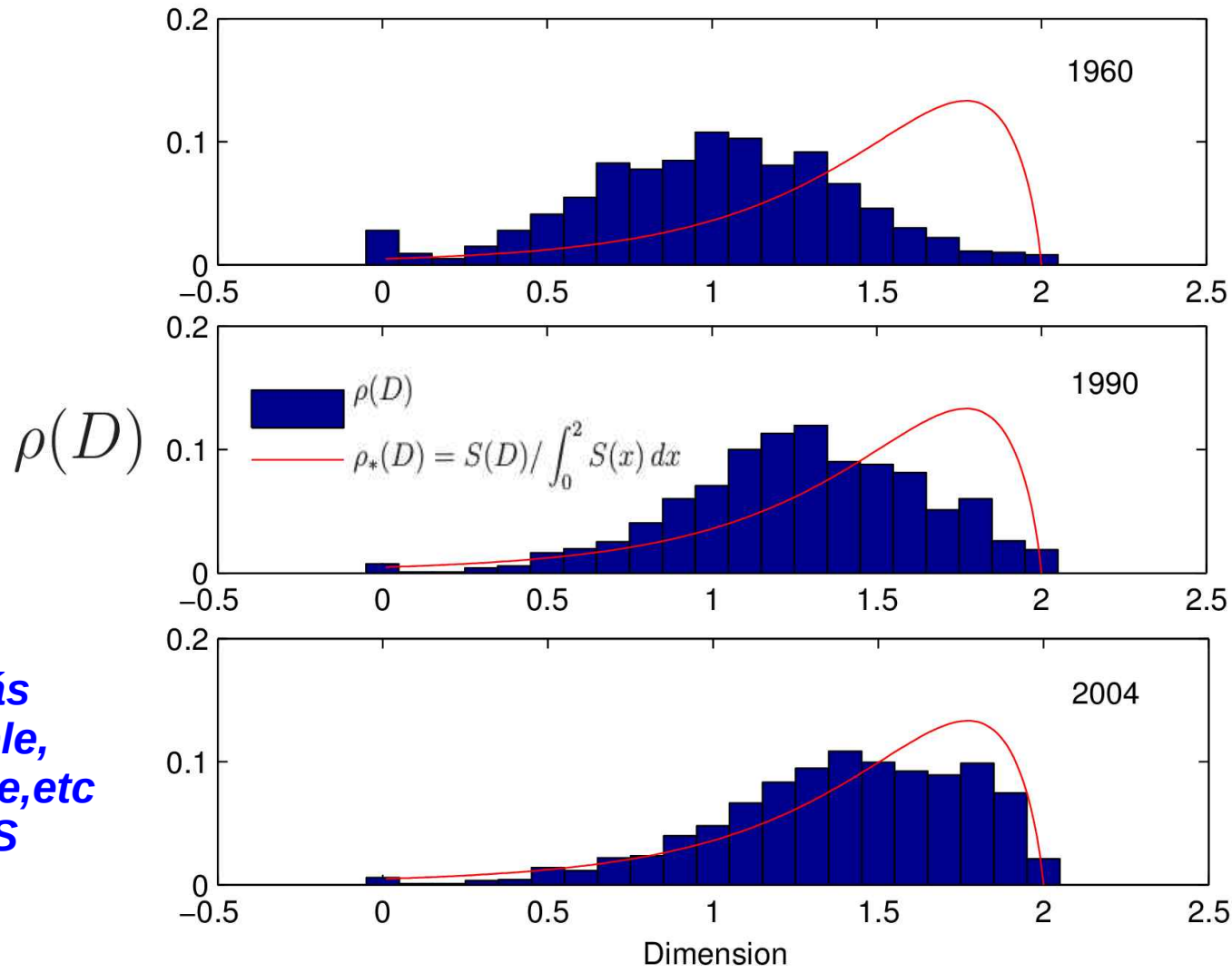
ignorancia $\equiv S(D)$

Sucesiva proximidad de $\rho(D)$ a $\rho_*(D) = S(D) / \int_0^2 S(x) dx$:
 evolución en la **ausencia de control** ...



$\rho_*(D) \equiv$ descontrol \equiv ignorancia $\equiv S(D)$
“no se puede controlar lo que se desconoce”

Sucesiva proximidad de $\rho(D)$ a $\rho_*(D) = S(D) / \int_0^2 S(x) dx$:
 evolución en la **ausencia de control** ...



“De lo más controlable, predecible, etc TENEMOS MENOS”

“De lo más incontrolable, impredecible, etc TENEMOS MAS”

$\rho_*(D) \equiv$ descontrol \equiv ignorancia $\equiv S(D)$
“no se puede controlar lo que se desconoce”

Generalización para $N > 2 \dots$

$$S(D) \approx \left(\frac{\lambda}{2^{m-1}} \right)^N H(2^{D-N}) \frac{2^{mD} - 1}{2^D - 1}$$

$$H(t) = -t \log t - (1 - t) \log(1 - t)$$

(Shannon)

Autosimilaridad como función de N:

$$S_{N_1}(D) \approx \lambda^{-N_2+N_1} S_{N_2}(D + N_2 - N_1)$$

Autosimilaridad entre las derivadas de S(D):

$$S'(D) \approx AS(D + b)$$
$$b = b(m)$$

Robustez de la definición de S(D):

$$S(D) \approx (\lambda/\bar{\lambda})^N \bar{S}(D)$$

$$[\log(\lambda/2)] = m = [\log(\bar{\lambda}/2)]$$

$$\frac{d^i S(D = D_i)}{dD^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$D_i - D_{i+1} \approx b, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Autosimilaridad como función de N:

$$S_{N_1}(D) \approx \lambda^{-N_2+N_1} S_{N_2}(D + N_2 - N_1)$$

Autosimilaridad entre las derivadas de S(D):

$$S'(D) \approx AS(D + b)$$
$$b=b(m)$$

Robustez de la definición de S(D):

$$S(D) \approx (\lambda/\bar{\lambda})^N \bar{S}(D)$$

$$[\log(\lambda/2)] = m = [\log(\bar{\lambda}/2)]$$

Generalización para $N > 2$...

$$S(D) \approx \left(\frac{\lambda}{2^{m-1}} \right)^N H(2^{D-N}) \frac{2^{mD} - 1}{2^D - 1}$$

$$H(t) = -t \log t - (1 - t) \log(1 - t)$$

(Shannon)

Caracterización de las componentes del sistema de acuerdo a los regímenes presentes en la entropía $S(D)$, **independientemente del punto de vista del observador...**

$$\frac{d^i S(D = D_i)}{dD^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$D_i - D_{i+1} \approx b, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Conocida la generalización de este marco teórico para $N > 2$...

¿OTRAS APLICACIONES DENTRO DEL URBANISMO?

***Incorporar altura de las edificaciones, del terreno, etc.**

***Redes de servicios: metro, transportes, electricidad, agua, gas, etc.**

Conocida la generalización de este marco teórico para $N > 2$...

¿OTRAS APLICACIONES DENTRO DEL URBANISMO?

***Incorporar altura de las edificaciones, del terreno, etc.**

***Redes de servicios: metro, transportes, electricidad, agua, gas, etc.**

¿OTRAS APLICACIONES FUERA DEL URBANISMO?

Sistemas complejos que tienden al descontrol:

redes sociales, sistemas económicos, sociológicos, etc.

Conocida la generalización de este marco teórico para $N > 2$...

¿OTRAS APLICACIONES DENTRO DEL URBANISMO?

*Incorporar altura de las edificaciones, del terreno, etc.

*Redes de servicios: metro, transportes, electricidad, agua, gas, etc.

¿OTRAS APLICACIONES FUERA DEL URBANISMO?

Sistemas complejos que tienden al descontrol:
redes sociales, sistemas económicos, sociológicos, etc.

A. Pamela Flores

Maestría en alerta temprana mediante imágenes satelitales.
Centro Espacial Teófilo Tabanera, CONAE

Asentamientos en el periurbano bonaerense.



Juan M. Echecolanea

Estudiante avanzado de Geografía. UNC

Clasificación de regímenes urbanos en la ciudad de Córdoba, Argentina.



Conocida la generalización de este marco teórico para $N > 2$...

¿OTRAS APLICACIONES DENTRO DEL URBANISMO?

*Incorporar altura de las edificaciones, del terreno, etc.

*Redes de servicios: metro, transportes, electricidad, agua, gas, etc.

¿OTRAS APLICACIONES FUERA DEL URBANISMO?

Sistemas complejos que tienden al descontrol:
redes sociales, sistemas económicos, sociológicos, etc.

A. Pamela Flores

Maestría en alerta temprana mediante imágenes satelitales.
Centro Espacial Teófilo Tabanera, CONAE

Asentamientos en el periurbano bonaerense.



Juan M. Echecolanea

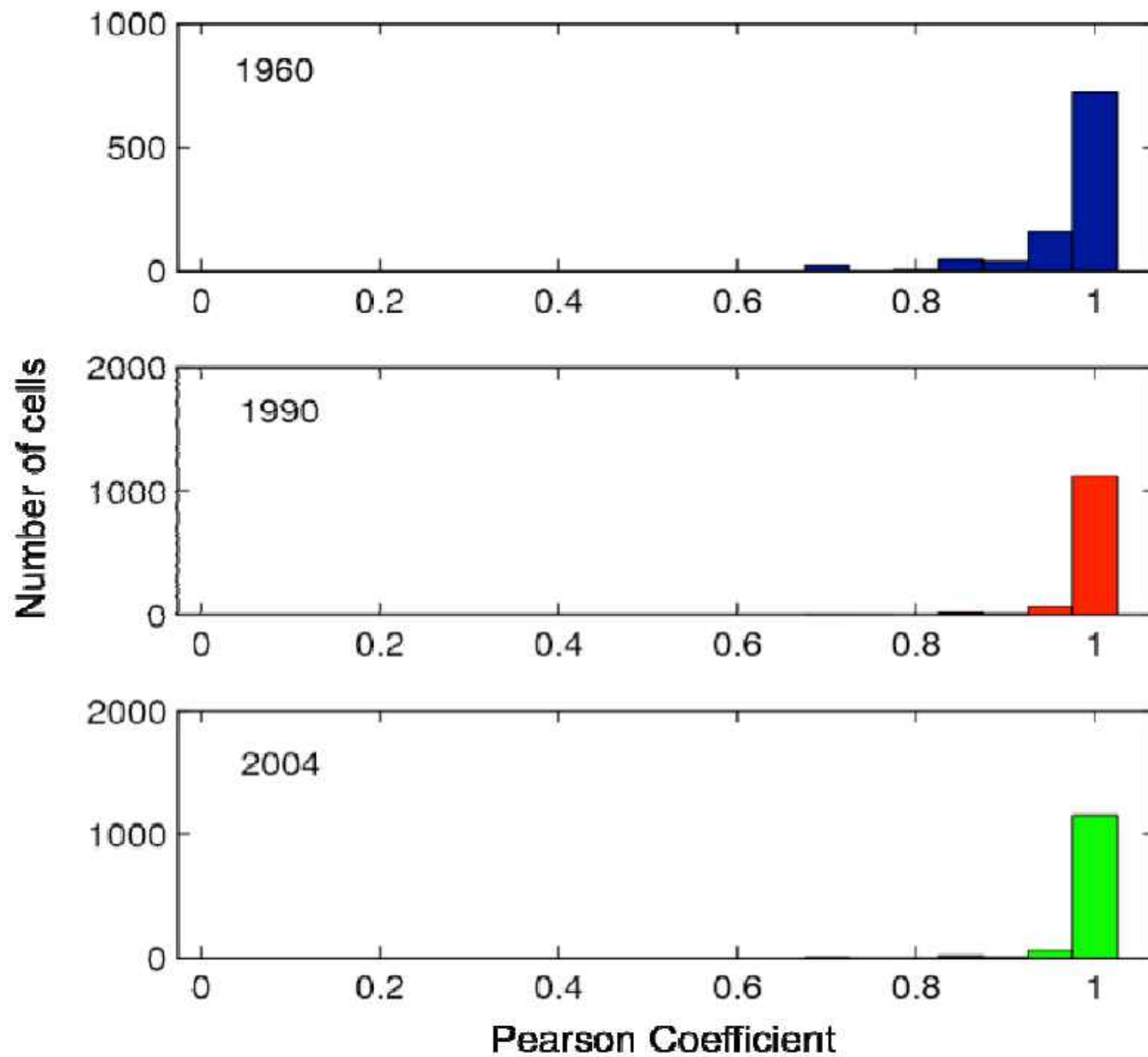
Estudiante avanzado de Geografía. UNC

Clasificación de regímenes urbanos en la ciudad de Córdoba, Argentina.

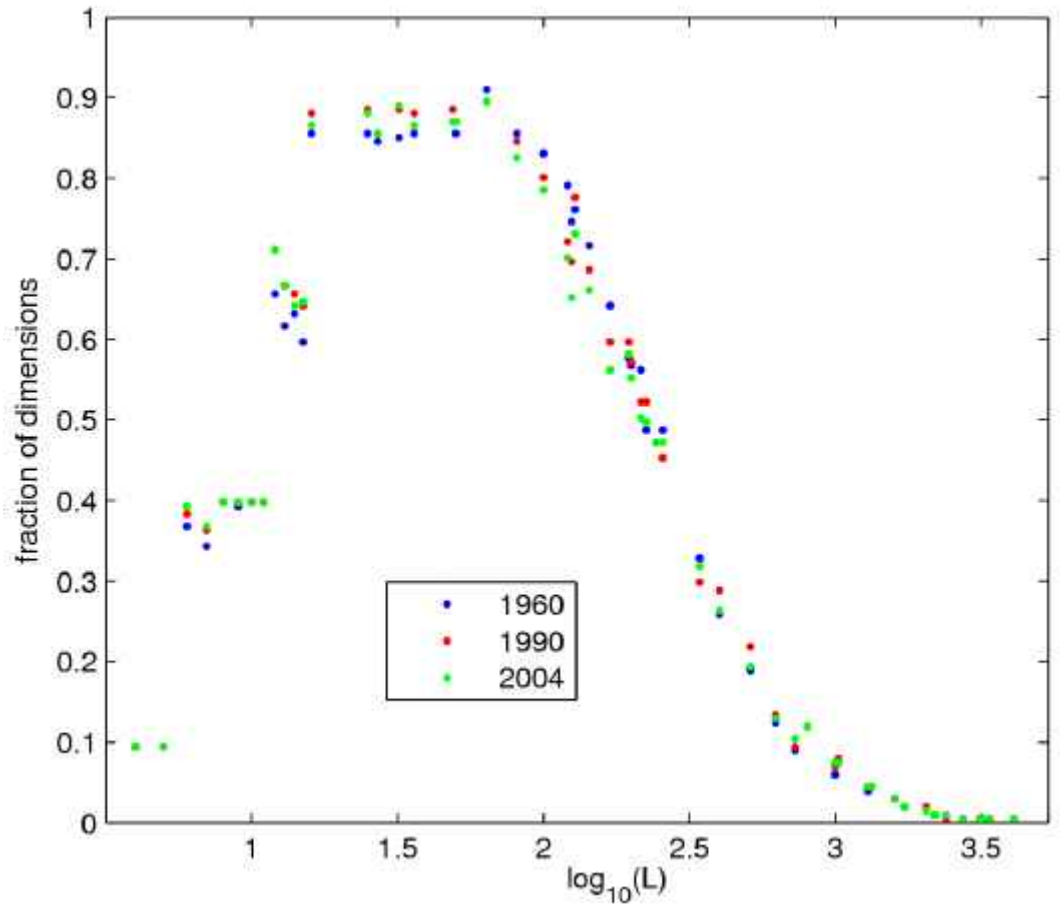


¡¡¡MUCHAS GRACIAS!!!

FAQs



¿Cómo elegir el tamaño de las celdas? ...

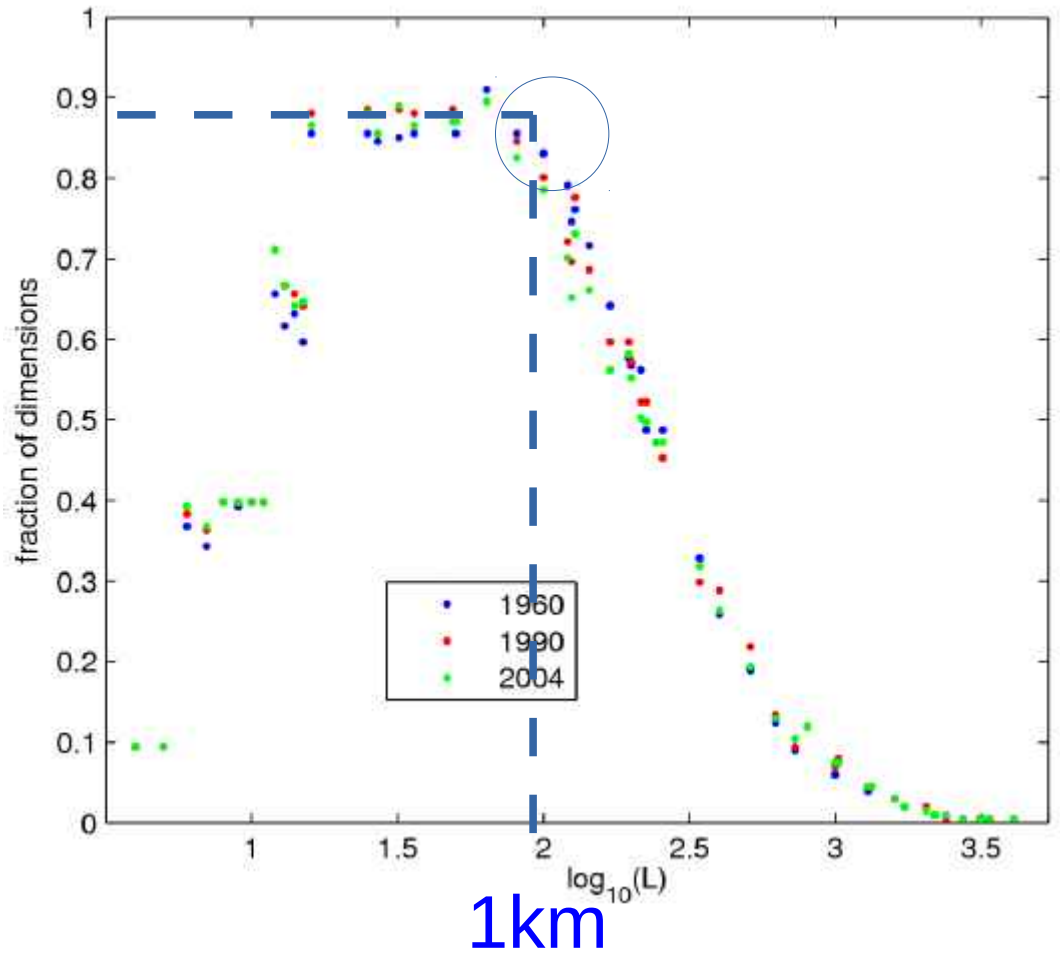


aumenta el carácter multifractal de todo el sistema



aumenta el carácter fractal dentro de cada celda

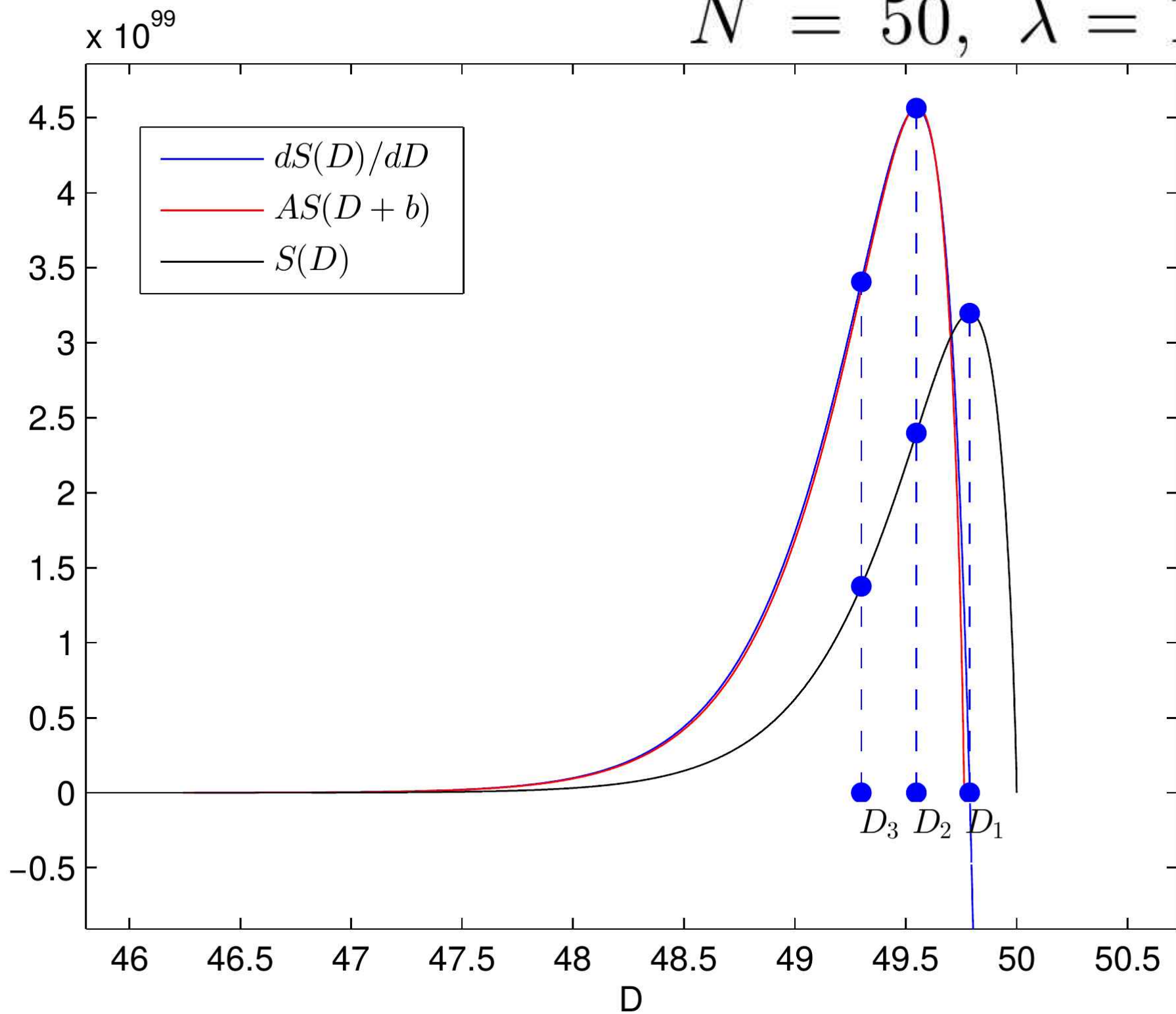
¿Cómo elegir el tamaño de las celdas? ...



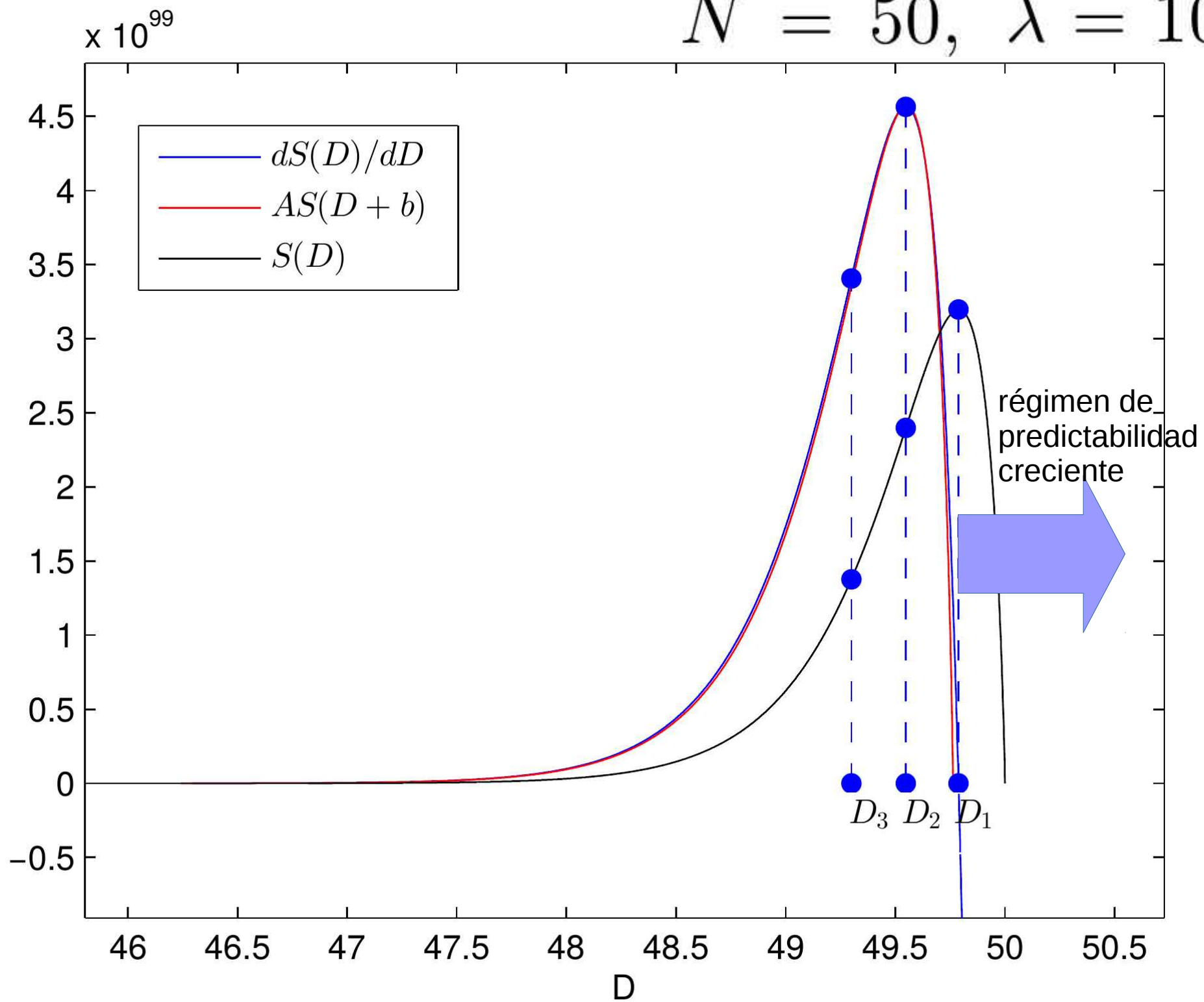
aumenta el carácter multifractal de todo el sistema



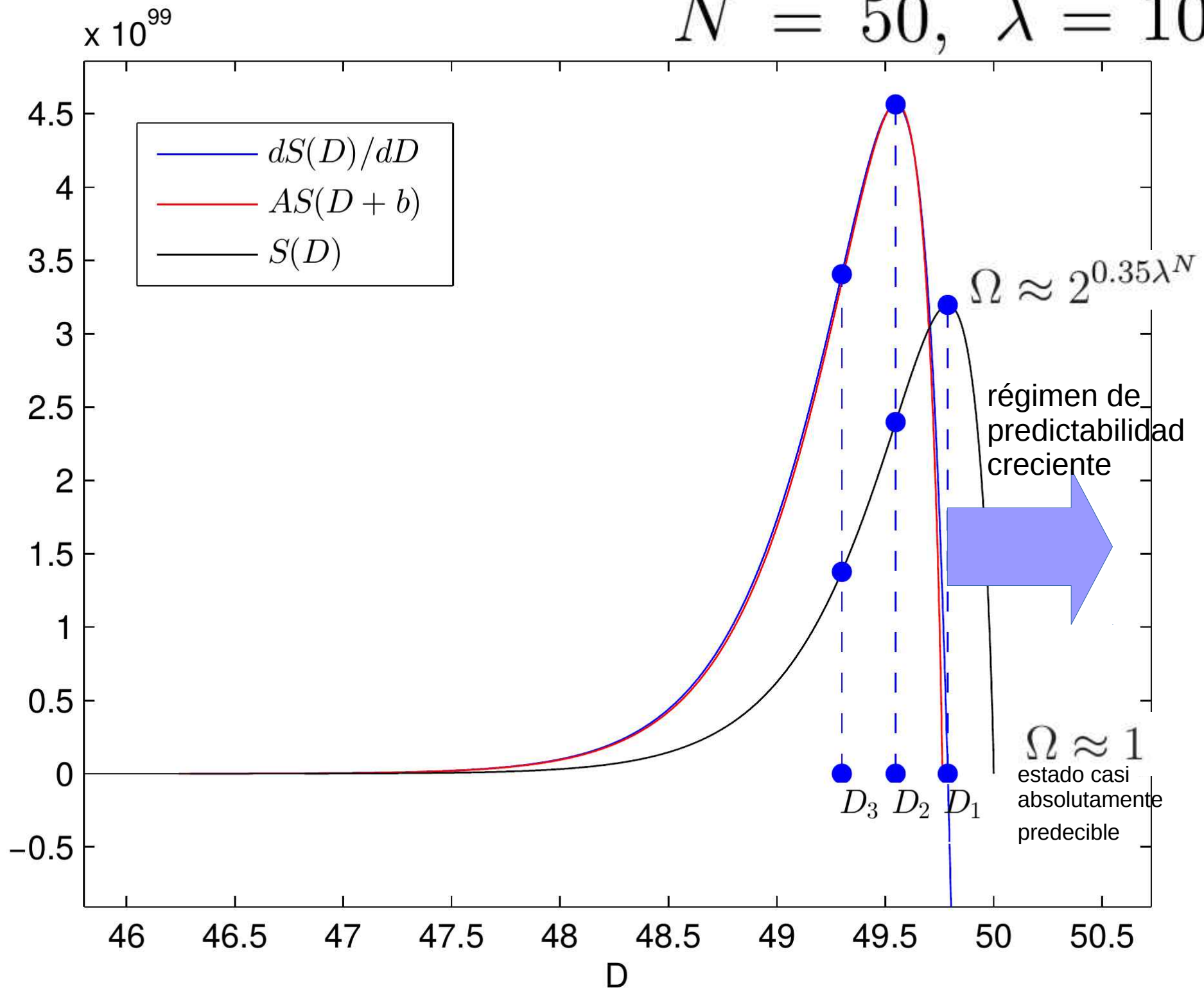
aumenta el carácter fractal dentro de cada celda

$N = 50, \lambda = 100$ 

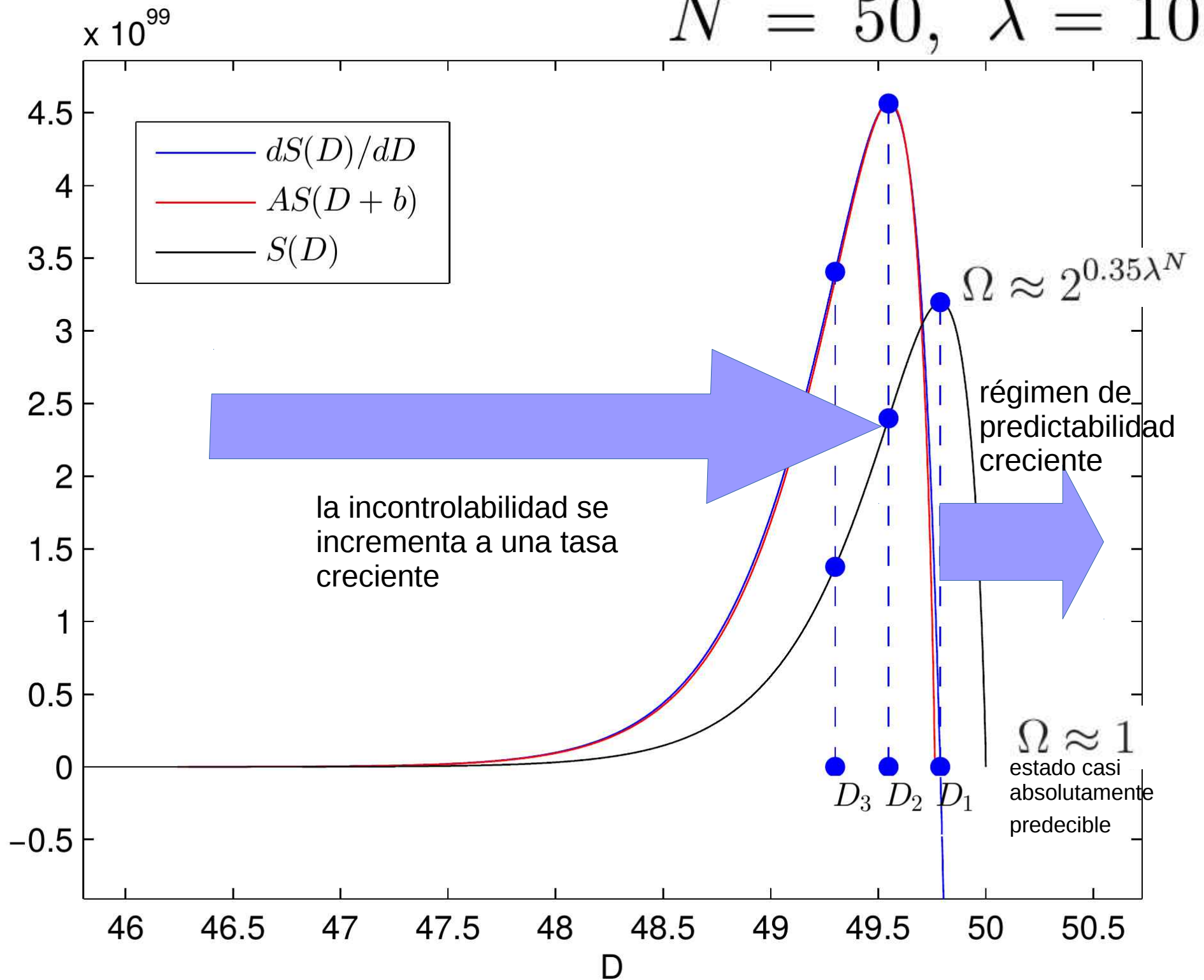
$N = 50, \lambda = 100$



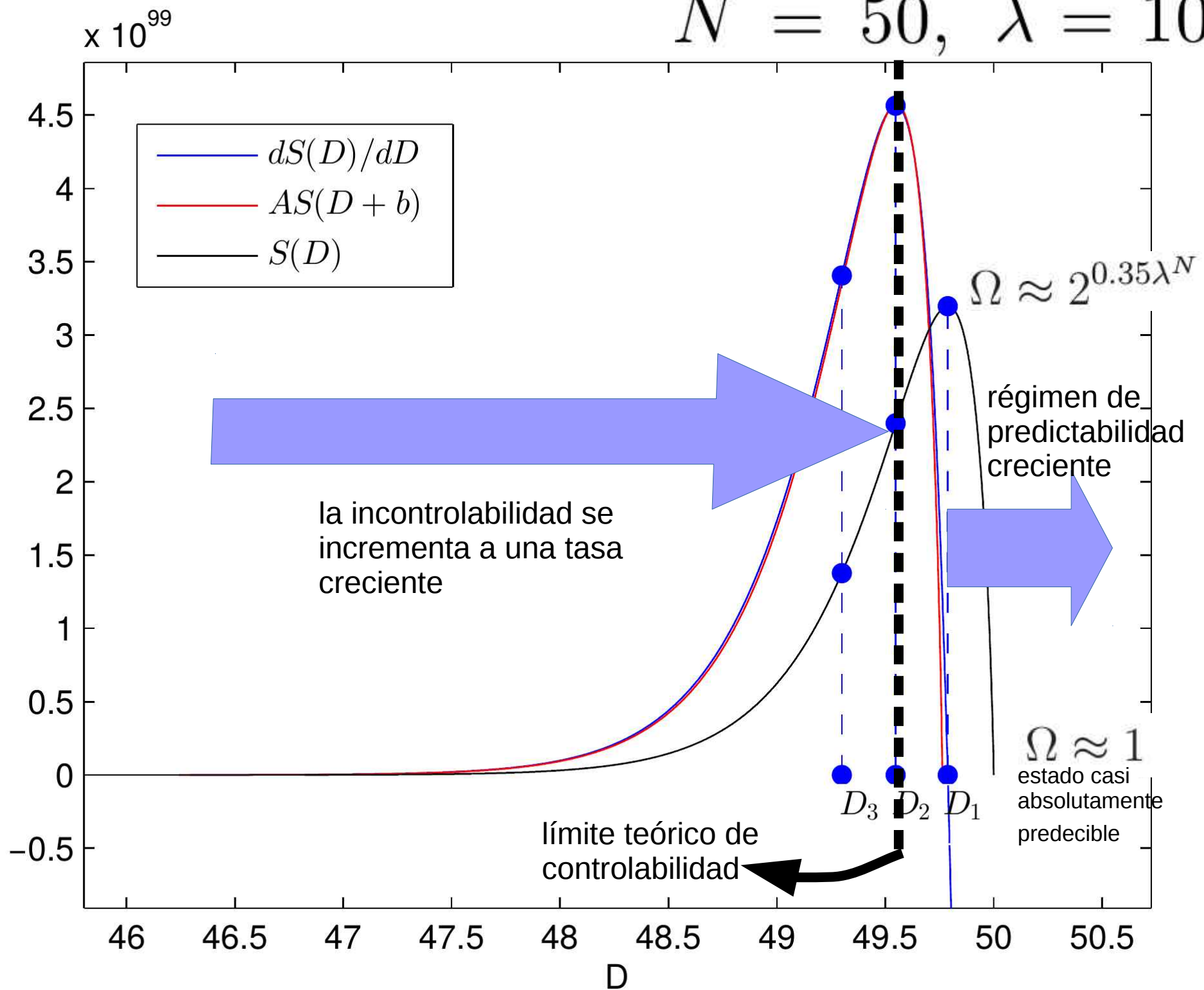
$N = 50, \lambda = 100$



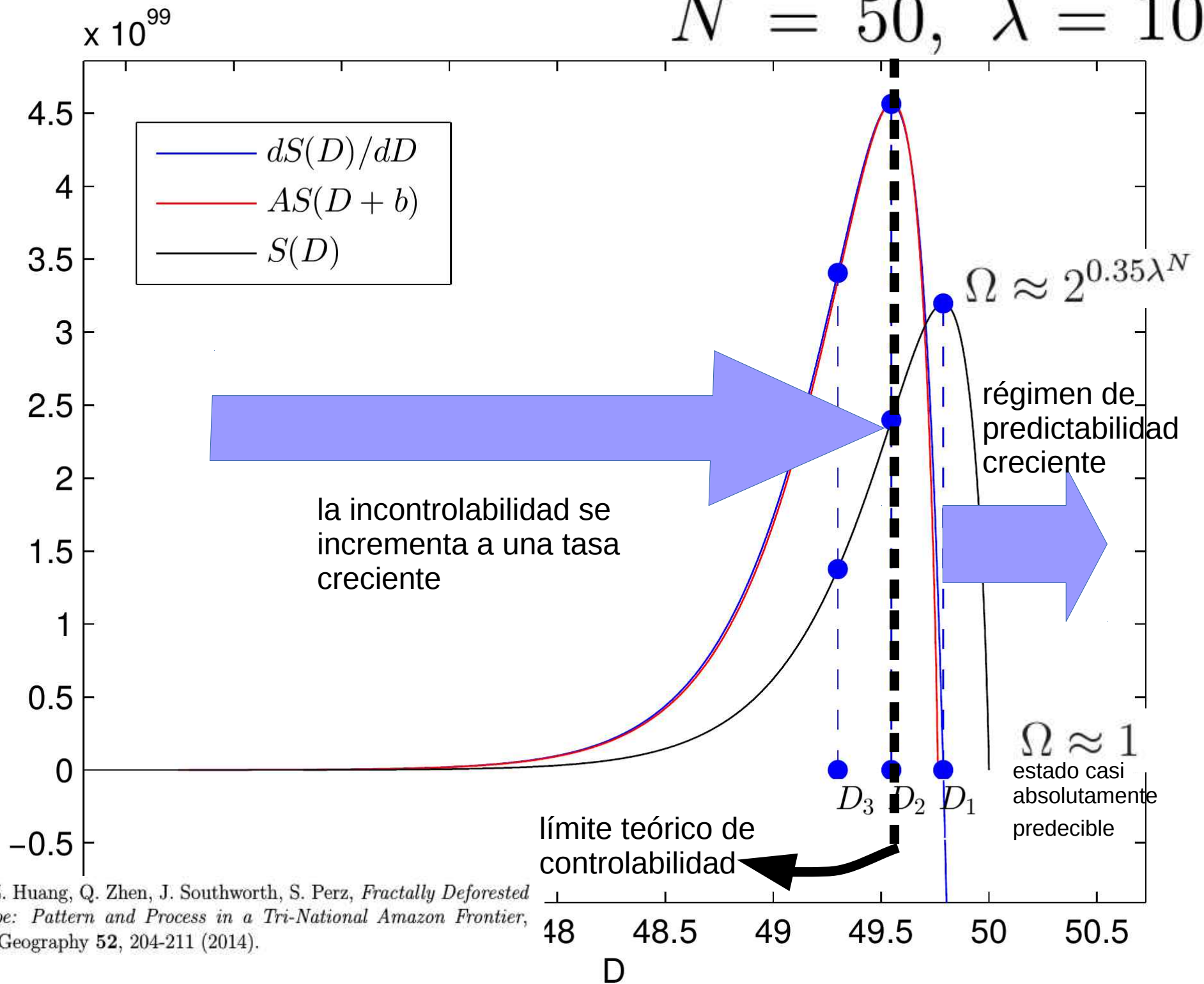
$$N = 50, \lambda = 100$$



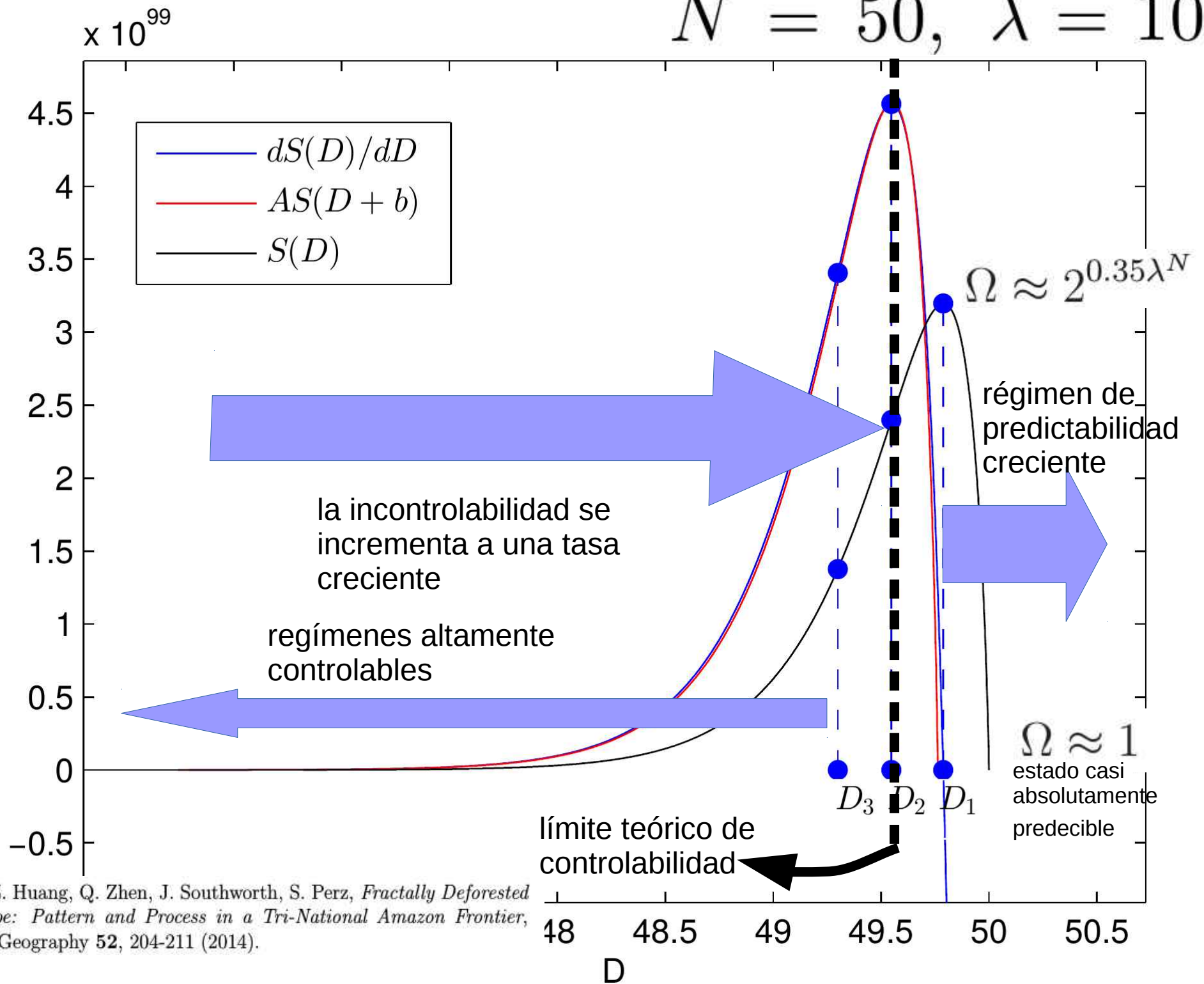
$$N = 50, \lambda = 100$$



$$N = 50, \lambda = 100$$



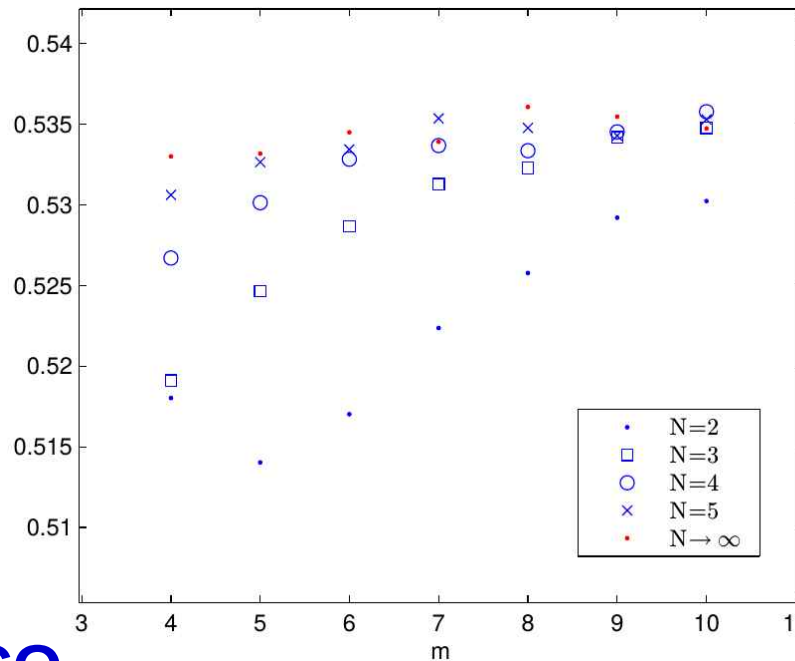
$$N = 50, \lambda = 100$$



SISTEMAS DOMINADOS POR LA ENTROPÍA : “evolución en la ausencia de control”

$$\rho(D) \longrightarrow \rho_*(D) = \frac{S(D)}{\int_0^N S(x) dx}$$

$$\int_{D_3}^{D_1} \rho_*(D) dD$$



53%

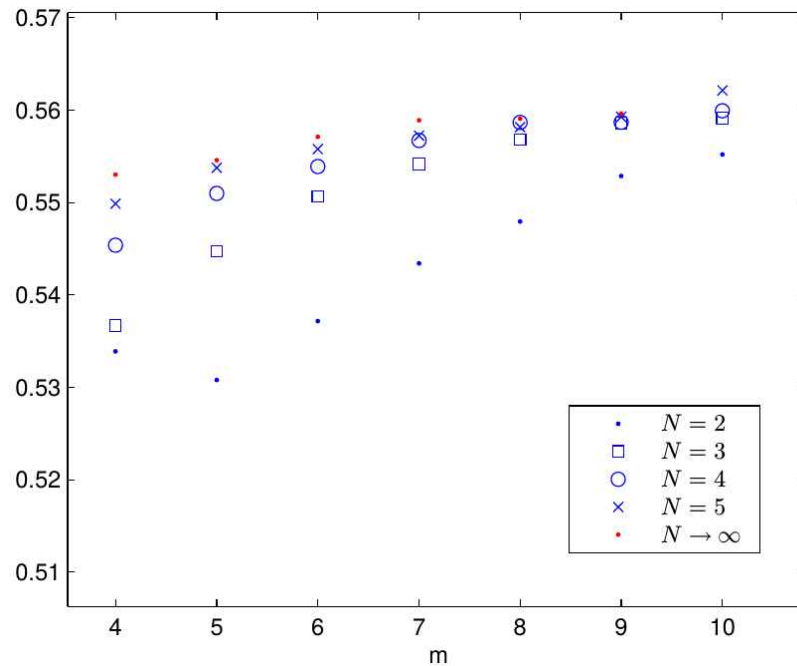
**MÁS DE LA MITAD
DE LA POBLACIÓN
EN EL INTERVALO
MÁS PROBLEMÁTICO**

**baja diversidad,
baja robustez**

SISTEMAS DOMINADOS POR LA ENTROPÍA : “evolución en la ausencia de control”

$$\rho(D) \longrightarrow \rho_*(D) = \frac{S(D)}{\int_0^N S(x) dx}$$

$$\int_{D_2}^N \rho_*(D) dD$$



55%

**MÁS DE LA MITAD
DE LA POBLACIÓN
SITUADA MÁS
ALLÁ DEL LIMITE
DE CONTROLABILIDAD**

**baja diversidad,
baja robustez**

$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N + \Delta N}$$

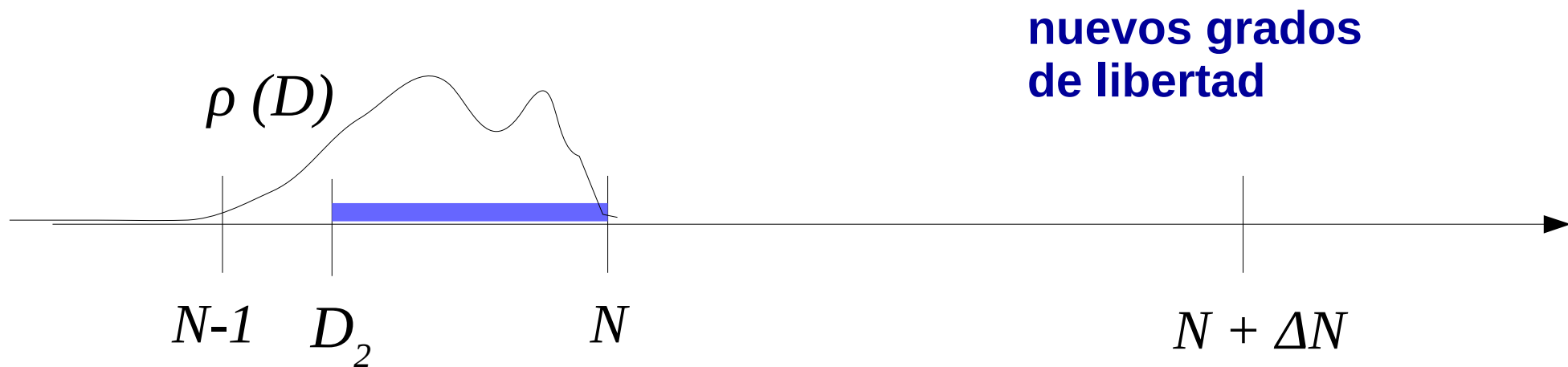
$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N + \Delta N}$$



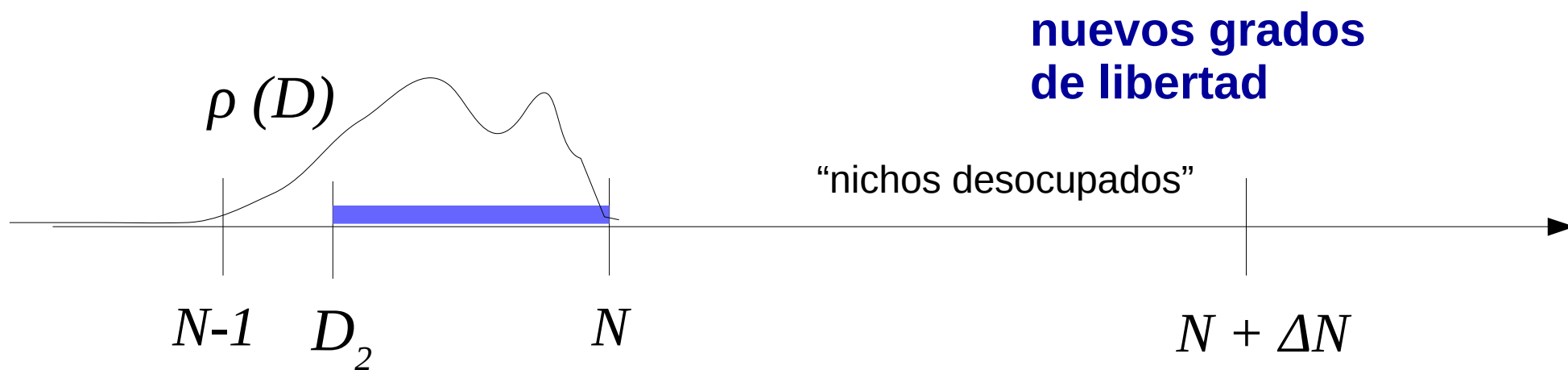
$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*}N \longrightarrow \rho_{*}N + \Delta N$$



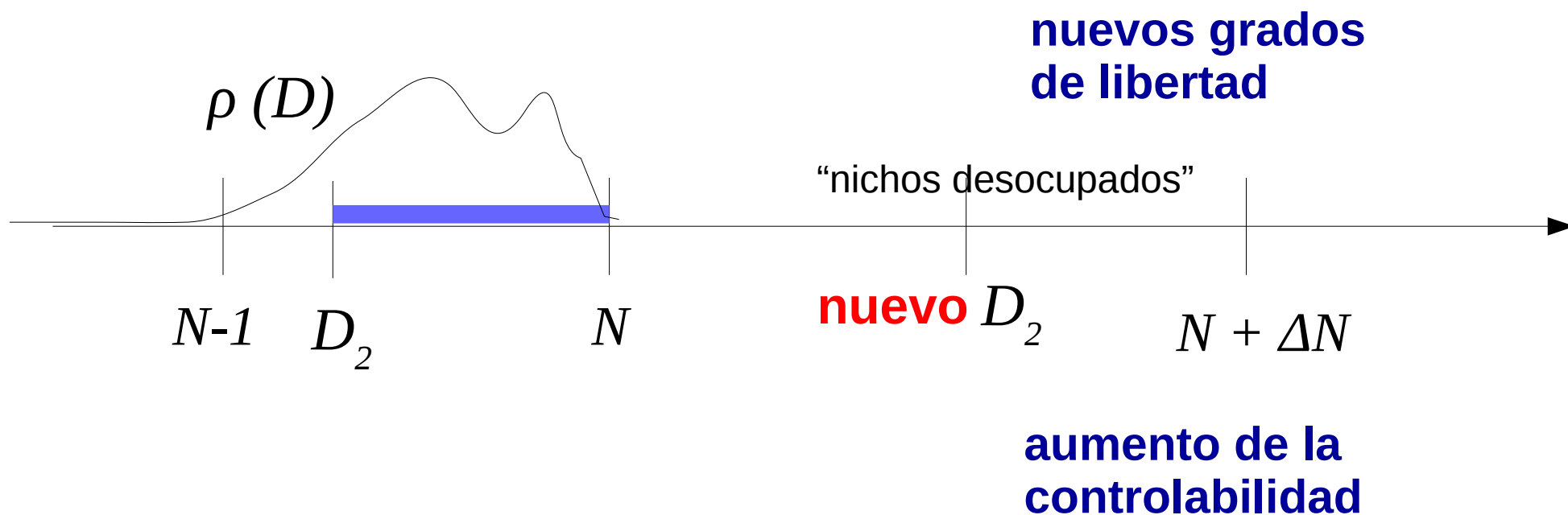
$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*}N \longrightarrow \rho_{*}N + \Delta N$$



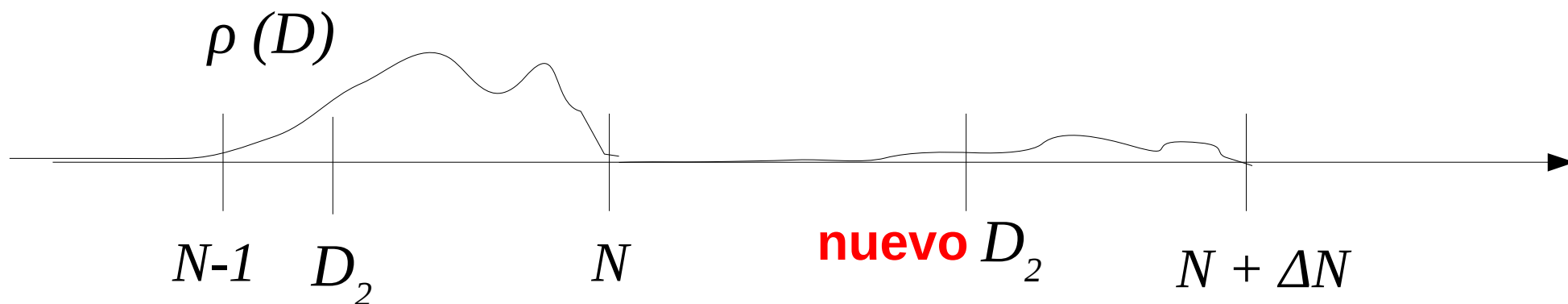
$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_* N \longrightarrow \rho_* N + \Delta N$$



$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N+\Delta N}$$



diversificación inicial

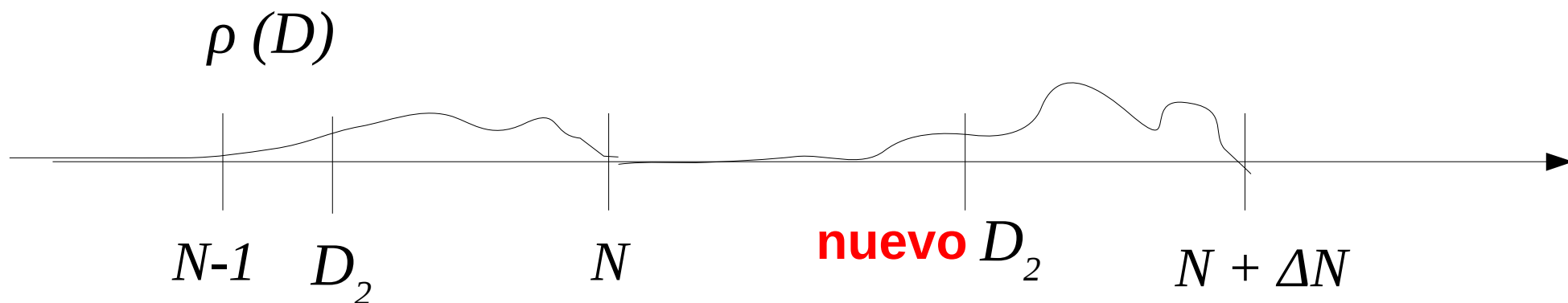
aumento de la controlabilidad

$$\left(\frac{d\sigma^2}{d\rho_{*,N+\Delta N}} \right)_{t=0} \approx \Delta N^2 > 0$$

(Gateaux)

$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N+\Delta N}$$



diversificación inicial

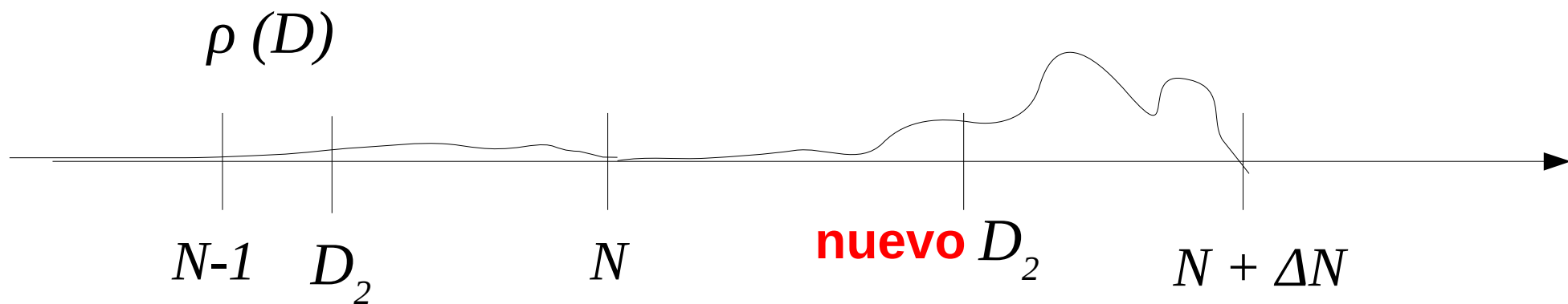
aumento de la controlabilidad

$$\left(\frac{d\sigma^2}{d\rho_{*,N+\Delta N}} \right)_{t=0} \approx \Delta N^2 > 0$$

(Gateaux)

$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

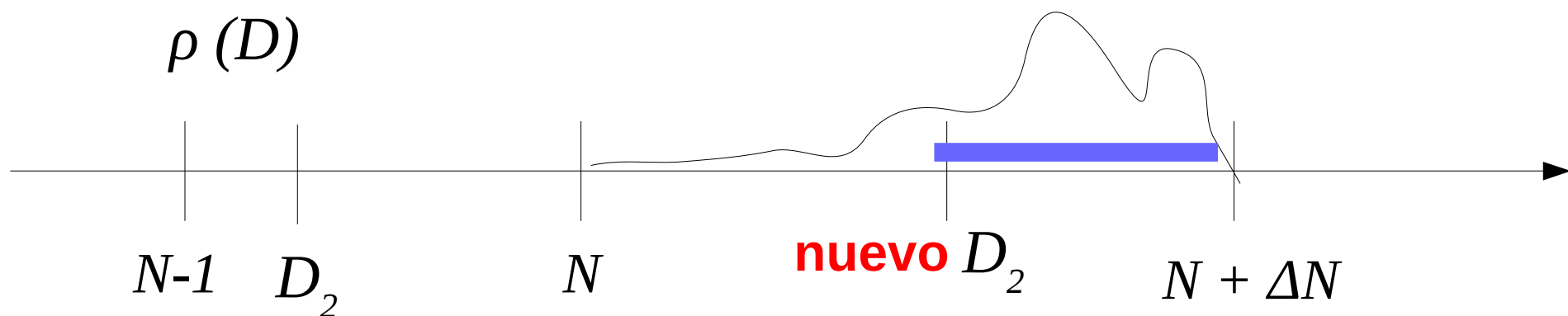
$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N + \Delta N}$$



?

$$N \longrightarrow N + \Delta N$$

$$\rho_{*N} \longrightarrow \rho_{*N + \Delta N}$$

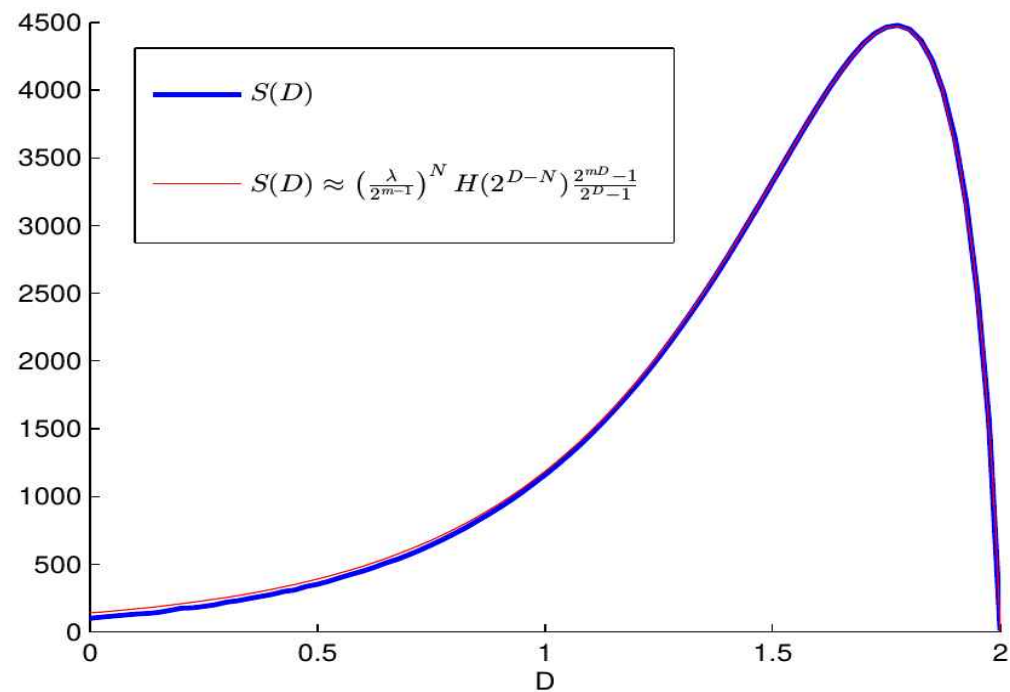


*La incorporación de
grados de libertad
no es una solución que
dura para siempre...*

$$S(D) \approx \left(\frac{\lambda}{2^{m-1}} \right)^N H(2^{D-N}) \frac{2^{mD} - 1}{2^D - 1}$$

$$H(t) = -t \log t - (1 - t) \log(1 - t)$$

(Shannon)



case $N = 2$ and $\lambda = 100$.